HAGFRÆÐISTOFNUN HÁSKÓLA ÍSLANDS

Hagfræðistofnun Háskóla Íslands
Odda v/Sturlugötu
Sími: 525-4500/525-4553
Fax nr. 552-6806
Heimasíða: www.hag.hi.is
Tölvufang: ioes@hag.hi.is

Skýrsla nr. C98:04

Tölfræðilegar aðferðir við fasteignamat

Skýrsla til Fasteignamats ríkisins

Apríl 1998

Formáli

Í júní 1996 var undirritaður samningur á milli Fasteignamats ríkisins og Hagfræðistofnunar um að þróað yrði tölfræðilegt líkan sem spáð gæti fyrir um markaðsvirði íbúðarhúsnæðis. Ljóst er að slíkt líkan er afar hjálplegt til að meta stofn til eignarskattsálagningar og til að veita fyrirtækjum og einstaklingum sem bestar upplýsingar um fasteignamarkaðinn.

Nokkrar tafir hafa orðið á áætluðum verklokum og má rekja þær þess að verkið var nokkuð margbrotnara en áætlað var í upphafi. Afrakstur verksins er annarrs vegar að finna í þessari skýrslu sem lýsir aðferðum og tillögum að verklagi og hins vegar í formi tilraunaforrits sem framkvæmir áðurgreint mat. Verkið vann dr. Helgi Tómasson dósent.

Hagfræðistofnun í apríl 1998

Tryggvi Þór Herbertsson

Tryggvi Þór Herbertsson,
forstöðumaður.

English Summary

The background is that an appraisal institute wants to construct an objective mechanism for estimating the value of each of a group of properties, in this case residential housing in a given area. The institute gathers data on real estate sales on a continuous basis. The data includes information on the characteristics of each property sold. Among the characteristics there are variables such as the date of sale, price, location, size, year of construction etc. The idea is to value each property in a real estate registry by using a regression model explaining market value by the characteristics of the property. By nature market value evolves over time. The regression coefficients are thus conceivably not constant over time. To control market dynamics a regression with time varying parameters is set up. The Kalman filter algorithm and a state space model is used to control the dynamics of the parameters. The speed of adaption is controlled with special parameters, so called hyper parameters. The Kalman filter algorithm consists of iterated use of Bayes rule, in this case combining existing estimate of market value with information obtained in newly observed prices. The speed of adaption is related to how much weight is given to the past state of the market relative to new information. A brief review on Bayesian estimation is given. In this report no attempt is done to estimate the hyperparameters. Only a brief comparison of some values is shown. Two version of dependent variables are discussed. The first version explains the deviance of log-sales from log-estimated reconstruction value (RV). The estimated RV is given for each property and is supposed to represent how much it would cost to build this property. RV is updated once a year, by the authorities for each property in the registry. The RV works as a price deflator that picks up such effects as inflation. The second version does not use the RV, i.e. it lets the Kalman filter trace effects of inflation. The data is based on sales of apartments and single family houses in the Reykjavik area from the period 1980 to middle of 1996, roughly 38000 transactions. Separate analysis is performed for single family houses, roughly 4000, and apartments, roughly 34000. It is concluded that by using methods of this type the standard deviation of prediction of price will be around 15%, regardless of whether RV is used or not. This is a figure of a similar magnitude as if the traditional appraisal value was used. The traditional appraisal value underestimates the price to a greater degree than the methods

developed here. That may be a policy decision and if one wishes it is straightforward to bias the Kalman filter estimate downwards as well. Finally a working procedure for partially automated appraisal is proposed. Step one involves filtering the data as it is entered into the database at the appraisal institute. Step two applies the Kalman filter algorithm, using fresh data to update the latest estimate of regression parameters, and the third and final step is to use the regression parameters to get an appraisal value for each property in the registry.

The results suggest that use of automative methods in appraisal will yield a standard error of prediction which is similar in magnitude to those attained by a traditional method.

Efnisyfirlit

Töfluskrá

Myndaskrá

1 Inngangur

Markmið þessa verkefnis er að þróa tölfræðilegt líkan sem spáir markaðsvirði íbúðarhúsnæðis. Slíkt nýtist bæði við eignamat sem skattstofn og einnig til að veita fjárfestum, fyrirtækjum og einstaklingum sem bestar upplýsingar um markaðinn. Nú á tímum eru gerðar auknar kröfur um hlutlægni vegna mats eigna [11]. Tölfræðileg líkön, t.d. aðhvarfsgreining hafa reynst hagkvæmur valkostur við hefðbundnar matsaðferðir, (samanber [12] og [7]).

Verkefnið er unnið úr gögnum úr kaupskrá Fasteignamats Ríkisins (FMR). Í kaupskránni eru færslur unnar upp úr kaupsamningum á fasteignamarkaði. Gögnin innihalda upplýsingar um sölu á tiltekinni eign, svo sem dagsetningu, verð og ýmsa eiginleika viðkomandi eignar, staðsetningu, stærð o.fl. Í kafla 2 er fjallað lauslega um bakgrunn tölfræðilegra aðferða. Fyrst ber að nefna í aðhvarfsgreiningu í kafla 2.1, sem er sennilega ein mest notaða tölfræðiaðferðin en henni fylgja ýmsar hættur og vandamál sem eru reifuð lauslega í kafla 2.2. Valkostir við venjulegar matsaðferðir í aðhvarfsgreiningu eru nefndir í köflum 2.4 og 2.5. Hugmyndin með þeim aðferðum er að auka stöðugleika með því að innleiða ákveðna hlutdrægni. Það er æskilegast fyrir þann hlutdræga að hafa rétt fyrir sér eða næstum rétt fyrir sér, en þó má vera hlutdrægur á svo varkáran máta að ávinningur sé að, þrátt fyrir að viðkomandi hafi rangt fyrir sér [6]). Sala á eignum fer fram á tilteknum tíma svo hægt er að sjá í hvaða röð sölur verða en í því felast upplýsingar um þróun markaðarins sem hægt er að hafa til hliðsjónar.

Kalman síu (e. Kalman filter) aðferðin er öflugt tæki til þess að hafa eftirlit með þáttum sem þróast í tíma. Lauslegt yfirlit byggt á riti Harvey's [3] er gefið í kafla 2.6. Kalman síu aðferðin býður upp á þann möguleika að endurmeta jafnóðum og upplýsingar berast. Gera verður glöggan mun við slíkt "on-line" mat hvort gagnasöfnunin leiði til þess að upplýsingar um stöðugt ástand verði betri og betri eða hvort ástandið sé síbreytilegt og gagnasöfnunin geti ekki gert annað en að elta ástandið. Kalman síu aðferðin ræður við hvort tveggja, bæði svokallaða endurkvæma aðhvarfsgreiningu (e. recursive regression) þar sem matið er endurskoðað við hverja mælingu og lokaniðurstaðan er jöfn því að gerð hefði verið venjuleg aðhvarfsgreining fyrir öll gögnin, og metið líkan sem breytist í tíma eftir fyrirfram skilgreindu mynstri. Þessu tvennu er blandað saman hér. Gert er ráð fyrir að ástandið sé fast innan hvers mánaðar, en að breyting milli mánaða sé samkvæmt ákveðnu mynstri. Hugsanlegt er að hafa breytingar þéttari, t.d. vikulega eða daglega, en vegna eðli fasteignamarkaðarins var talið nægja að láta kerfið breytast mánaðarlega. Í þessu verkefni er mynstrið skilgreint þannig að parametrar hreyfist sem ferli (einnig nefnt random walk eða Brownian motion). Hvernig setja beri Kalman síu aðferðina upp svo að hún framkvæmi þetta er sýnt í kafla 2.8. Í kafla 3 eru gögn FMR meðhöndluð. Lýst er líkanagerð þar sem leitast er við að skýra frávik núvirts kaupsamnings frá endurstofnsverði í kafla 3.2. Í kafla 3.3 er líkanið sjálft látið mynda verðlagsgrunn fasteigna. Að lokum eru skilgreind nokkur vinnuforrit sem FMR getur notað við gagnavinnslu í kafla 3.4. Þar er lýst forritum sem að gagni ættu að koma við villuleit í nýjum færslum kaupskrár, við útreikning á spáðu söluverði, þ.e. útreikning á fasteignamati og notkun nýrra söluupplýsinga við uppfærslu á mati á ástandi markaðarins.

2 Yfirlit um aðferðir

2.1 Nokkur atriði um aðhvarfsgreiningu

Aðhvarfsgreining (e. regression) í sinni einföldustu mynd gengur út á að finna jöfnu bestu línu, sem lýsir tengslum breytanna y og x. Hugmyndin er að reyna að spá y þegar gildið á x er þekkt. Gengið er út frá að hið sanna samband breytanna sé á forminu:

$$y = \alpha + \beta\, x + \varepsilon$$

þar sem ε er ómælanlegt frávik. Safnað er mælingum $(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ og gert er ráð fyrir að tilsvarandi $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ séu einsdreifðar óháðar hendingar (e. random variables). Oftast er gert ráð fyrir normaldreifingu, þ.e. að ε_i séu $N(0,\sigma^2)$. Þetta má útvíkka þannig að y sé skýrt með fleiri stærðum:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1\, x_1 + \cdots + \alpha_k + \varepsilon$$

Gögnum úr svona líkani er best lýst með fylkja formi (e. matrix form).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\alpha + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Hér táknar vektorinn Y mælingar á þeirri breytu sem skýra skal og fylkið X tilsvarandi mælingar á skýristærðum, y_1 er fyrsta mæling á y og x_{11} er fyrsta mæling á skýristærð númer 1. Ef fasti er í líkaninu þá er fremsti dálkur X-fylkisins 1. Vektorinn ε samanstendur af ómælanlegum frávikum og vektorinn α, stikavektorinn (e. parameter-vector), lýsir þýðingu einstakra x-breyta fyrir y. Ef breyta númer j er aukin um eina einingu er væntanleg breyting á y, α_j. Vektorinn ε er vektor af óháðum einsdreifðum hendingum með meðaltal 0. Það felur m.a. í sér að:

$$E(\varepsilon) = 0 \qquad \text{og} \qquad V(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

Hér táknar E væntanlegt gildi (e. expected value) og V dreifni-fylki (e. variance-covariance matrix). Það að stökin í ε sem ekki eru á hornalínu séu 0 þýðir að ekki er fylgni á milli frávika í einstökum mælingum. Í hagnýtum vandamálum er α óþekkt og verður að meta út frá mælingum. Algengasta aðferð við að meta α er aðferð minnstu kvaðrata (e. least-squares), oft skammstafað OLS (e. ordinary least-squares). Hugmyndin með þeirri aðferð er að finna það gildi a, á stikavektornum α, sem gerir frávikin

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

þar sem $\hat{y}_i = x_i a$, sem minnst í þeim skilningi að:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y})$$

sé lágmarkað. Lausnin á þessu lágmörkunarvandamáli er:

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Oft er eðlilegt að setja hliðarskilyrði á α. Ef leysa á lágmörkunarvandamálið með línulegu hliðarskilyrði:

$$\mathrm{R}\alpha = \mathrm{r}$$

er lausnin

$$\tilde{\alpha} = (\mathrm{I} - (\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{R}'(\mathrm{R}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{R}')^{-1})(\mathrm{R}\hat{\alpha} - \mathrm{r})$$

2.2 Vandamál við aðhvarfsgreiningu

Í aðhvarfsgreiningu þarf að skilgreina líkanið nákvæmlega og ef mikilvægri breytu er sleppt þá er hætt við að aðrar breytur líkansins fari að leika hlutverk hennar. T.d. hefur í bandarískum rannsóknum komið fram að arinn sé verðmeiri en bílskúr. Í þeim tilfellum er hugsanlegt að arinninn sé samnefnari fyrir mikil gæði sem erfitt er að tengja við eitthvað ákveðið. Hugsanlegt er að í stórum og dýrum húsum sé oft arinn og hann sé því að einhverju leyti í hlutverki stærðar. Einnig gæti verið um einhvers konar tískublæbrigði að ræða. Eiginleikar $\mathrm{X'X}$ fylkisins segja meðal annars til um hversu vel aðgreinanlegar breyturnar eru. Ef mörg eigingildi $\mathrm{X'X}$ eru nálægt 0, þá eru einhverjir dálkar X nálægt því að vera línulega háðir. Breytur sem svara til þeirra dálka verða ekki auðveldlega greindar í sundur. Þetta fyrirbæri er nefnt marglínuleiki (e. multi-collinerarity). Í allri hagnýtri aðhvarfsgreiningu er nauðsynlegt að framkvæma einhvers konar gæðaeftirlit, "diagnostic". Ein slík tækni er að reikna:

$$\mathrm{hat} = \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'$$

hornalína hat-fylkisins, h_j er síðan notuð sem vísbending um áhrifamiklar mælingar. Ástæða er til að skoða sérstaklega öfgagildin á $\hat{\varepsilon}_j\mathrm{h}_j/(1\text{-}\mathrm{h}_j)$, þar sem $\hat{\varepsilon}_j$ er metin skekkja og h_j er j-ta stakið á hornalínu hat-fylkisins að ofan. Meðal þeirra er að vænta áhrifamikilla mælinga. Sumar eru e.t.v. skráningarvillur meðan aðrar eru e.t.v. réttar.

2.3 Grid-aðferð

Svokölluð grid-aðferð við mat tiltekinnar eignar gengur út á að fundnar eru nokkrar eignir sem selst hafa nýlega og eru sambærilegar við þá eign sem meta á. Þetta er gert þannig (sjá

[7]) að ef eiginleikar hugsanlegra samanburðareigna eru x_i og eignarinnar sem meta á eru x_0 þá eru fundnar t.d. þær 5 eignir sem fara sem næst þeirri eign sem meta á. Kvarðinn sem notaður er til að skilgreina nálægt er t.d.

$$ANET = \sum |b_i(x_i - x_0)|$$

þar sem ANET stendur fyrir net-adjustment-factor. Stærðirnar b_i eru vogir eða verðgildi eiginleikanna x_i. Síðan er reiknað meðalsöluverð sambærilegustu eigna. Hvernig það meðaltal er vegið og hvaða eiginleikar eru notaðir til að velja sambærilegar eignir er tæknilegt atriði. Hugmyndin er svipuð og paraður samanburður í hefðbundinni tölfræði (e. matched pairs), þ.e. að gera ráð fyrir að eignirnar séu að mestu leyti eins fyrir utan x_i stærðirnar. Kang-Reichert ([7]) rekja þessa aðferðafræði og bera saman við aðhvarfsgreiningu. Niðurstaðan er að báðar aðferðir geta gefið svipaða spá en munur sé e.t.v. á túlkun. Við grid-aðferð er mönnum sagt, að svipaðar eignir og þín seldust að meðaltali á þessa verði, en í aðhvarfsgreiningu eru metnir stikar notaðir sem mælikvarði á verð einstakra þátta. Grid-aðferð ætti að henta vel í einsleitum hverfum þar sem munur á eignum er fyrst og fremst í einhverjum örfáum breytum.

2.4 Bayes aðferðir

Hefðbundin tölfræði byggir á að túlka líkur sem mælikvarða á tíðni atburða. Bayes tölfræði byggir á að einnig megi túlka líkur sem mælikvarða á vissu(óvissu). Í Bayes tölfræði er óvissa um óþekktar stærðir í tölfræðilíkönum sett fram á formi líkindadreifingar. Fyrirfram vissa er sett fram sem "a priori" dreifing. Upplýsingar sem fást úr mælingum eru síðan tengdar við "a priori" dreifinguna með reglu Bayes og fengin "a posteriori" dreifingin. Ályktanir út frá mælingunum er síðan byggðar á "a posteriori" dreifingunni. Dæmi um ályktun um meðaltal í normaldreifingu: Líkanið er:

$$X|\mu \sim N(\mu, 1)$$

Hugsanleg "a priori" dreifing er:

$$\mu \sim N(0, \tau^2)$$

Ef einungis er tekin ein mæling x, á breytunni X verður "a posteriori" dreifingin:

$$\mu|x \sim N((1 - 1/(1 + \tau^2))\mathrm{x}, \tau^2/(1 + \tau^2))$$

Til einföldunar var hér gert ráð fyrir að staðalfrávikið væri þekkt(=1) og að hlutdrægnin væri 0. Dreifnin í "a priori" dreifingunni, τ^2 er mælikvarði á óvissuna um að sanna meðaltalið, μ sé 0. Ef τ er mjög lítið endurskoðast vissan lítið við mælinguna, þ.e. mikil "a priori" vissa. Valið á τ^2 stýrir því hversu hratt "a priori" vissan er endurskoðuð við söfnun gagna. Bayes tölfræðin er sérstakur skóli við ályktanir en Bayes aðferðir geta haft góða eiginleika í hinum hefðbundna tíðniskóla. Þær eru t.d. oft stöðugri, hafa minni dreifni og ef hlutdrægnin stefnir á 0 með vaxandi mælingafjölda fæst oft aðferð sem svipar til hefðbundinna aðferða. Þeir sem aðhyllast Bayes skólann halda því oft fram að fá megi fram hefðbundnar niðurstöður með því að velja "a priori" dreifinguna á tiltekinn hátt og þar með sé hefðbundni skólinn sértilfelli af Bayes skólanum.

2.5 Nokkur atriði um aðrar aðferðir

Meðal eiginleika OLS aðferðarinnar er að hún er hlutlaus (e. unbiased) ef líkanið er rétt skilgreint. Hlutlaus þýðir að α er hvorki ofmetið né vanmetið að meðaltali. Í hagnýtum tilfellum er rétta líkanið ekki þekkt. Algengt er að menn prófi sig áfram, þ.e. prófi kenningar um að ein eða fleiri hnita (e. coordinate) α-vektorsins séu t.d. 0. Ef tölfræðilegt próf segir að tiltekin hnit, α_i sé marktækt frábrugðin 0 þá álykta menn að þessi hnit sé ekki 0 og hafa tilsvarandi breytu x_i með í líkaninu. Þetta atferli er hlutdrægt í átt að 0, vegna þess að byggt hefur verið inn í aðferðina sérstakur kraftur sem setur matið stundum í 0. Þessari aðferð hefur verið gefið heitið "pre-test-estimation"([6]). OLS-aðferðin er BLUE (best-linear-unbiased-estimator), þar sem "best" og "unbiased" þýðir að breytileikinn, $V(\hat{\alpha})$ er lágmarkaður og að hlutdrægnin, "bias" = $E(\alpha - \hat{\alpha}) = b$ er 0. Þ.e. aðferðin er U="unbiased" Til að mæla gæði hlutdrægra aðferða er MSE="mean-square-error" heppilegt því það tekur bæði tillit til dreifni og hlutdrægni

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{E}(\alpha - \hat{\alpha})(\alpha - \hat{\alpha})' = V(\hat{\alpha}) + \mathrm{bb}'$$

Ef MSE mælikvarðinn er lágmarkaður er aukin hlutdrægni ekki leyfð nema að það lækki dreifnina meira en sem nemur áhrifum af aukinni hlutdrægni. MSE eins og skilgreint er að ofan er fylki (ef α er vektor) og því e.t.v. ekki svo þægilegur mælikvarði. MSE-fylkið er stundum á ensku nefnt "generalized-mean-square-error" eða "risk-matrix- measure" [6]. Einvíður mælikvarði er tr(MSE)= $E(\alpha - \hat{\alpha})'(\alpha - \hat{\alpha})$ á ensku nefnt "squared-error-loss" [6].

Hugsanlegur vandi við gagnafylkið X, er að mikilvægar skýristærðir vanti. Ef skýristærðirnar sem vantar eru tengdar þeim breytum sem eru í líkaninu fara þær breytur í líkaninu að reyna að leika hlutverk hinna gleymdu breyta. Í kaflanum hér á undan var nefnt dæmi um að arinn gæti virst verðmeiri en bílskúr (sjá [7]). Hugsanlega er arinninn einhvers konar samnefnari fyrir dulin gæði. Ef hins vegar er bætt við breytum sem mæla eiga þessi duldu gæði, litað gler, lúxuseldhús, gróðurhús o.s.frv. er hætt við marglínuleika (e. multicollinearity), þ.e. dálkar X-fylkisins eru nálægt því að vera línulega háðir og sama breytan nálægt því að vera margtalin. Við slíkar aðstæður taka stikar illskiljanleg gildi, t.d. gæti gildi lúxuseldhússins orðið negatívt. Í okkar tilfelli þar sem stærðin er inni í þrem breytum, samfelld í fermetrum, sem þrepabreyta og sem hluti af endurstofnsverðinu þá verður stuðullinn við stærð í fermetrum neikvæður. Við þessu hefur verið brugðist á þann hátt að meta stikavektorinn α með svokallaðri ridge-regression (sjá [7]), þ.e. að í stað hins venjulega:

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \text{er notað} \qquad \tilde{\alpha} = (X'X + \lambda I)^{-1}X'Y$$

þar sem λ er fasti stærri en 0. Hugmyndin með ridge-regression er að gera matið stöðugra. Ridge-regression gefur stöðugra mat og getur stundum spáð betur en venjuleg OLS aðhvarfsgreining. Ridge-regression metillinn var upphaflega fundinn upp til að gera mat stöðugra þegar marglínuleiki er til staðar. Metillinn er hlutdrægur, þ.e. að hver hnit eru vanmetin.

Líta má á Ridge regression metilinn sem Bayes metil. Ef gert er ráð fyrir að

$$Y \mid \alpha \sim N(X\alpha, \sigma^2)$$

og

$$\alpha \sim N(0, \sigma^2/\lambda I)$$

þá fæst með reglu Bayes að

$$\alpha \mid Y \sim N((X'X + \lambda I)^{-1}X'Y, \sigma^2(X'X + \lambda I)^{-1}X'X(X'X + \lambda I)^{-1})$$

Talan λ er því mælikvarði á óvissuna um α í "a priori" dreifingunni. Ef λ=0 er $1/\lambda=\infty$ þá fæst venjulegi OLS metilinn sem svarar til engrar fyrirframvitneskju um α. Á sama hátt ef λ er stórt er $1/\lambda$ lítið og þar með vissan um að α=0 mikil og breytist lítið þó að Y sé mælt. Sér í lagi ef $\lambda\approx\infty$ (t.d. 10^{10}) þá er matið áfram 0 eftir mælingu. Ridge metillinn er hlutdrægur í átt að 0 og λ segir til um hversu fast er haldið í þá átt. Valið á λ og 0 í "a priori" dreifingunni stýrir því áhrifum hlutdrægninnar. Menn hafa reynt að koma aftan að hlutunum og reyna að meta λ (eða hliðstæða stærð) út frá gögnunum (Y). Slíkt hefur verið nefnt "empirical Bayes". Þróun á empirical Bayes aðferðum hefur m.a. leitt til svokallaðra Stein aðferða [6]. Stein aðferðir byggja á því vera svo mátulega hlutdrægur að "mean-square-error"

$$\text{MSE} = \text{E}(\alpha - \hat{\alpha})(\alpha - \hat{\alpha})' = V(\hat{\alpha}) + \text{bb}'$$

sé lægri en fyrir venjulegan OLS metil. Þ.e. hlutdrægnin eykur stöðugleikann (minnkar dreifni) en er samt það lítil að MSE verður minni en með venjulegum aðferðum. Nauðsynlegt skilyrði þess að Stein metill nái að vera betri en OLS metill er:

$$\text{tr}(\text{X}'\text{X})^{-1} > 2\lambda_L$$

þar sem λ_L er stærsta eigingildi $\text{X}'\text{X}^{-1}$, sem má túlka gróflega að fyrir hendi séu þrjár eða fleiri nægjanlega óháðar skýristærðir [6]. Dæmi um notkun á Stein aðferðum við fasteignamat er grein Sirmans o.fl. [5]. Bæði Bayes aðferðir, Stein aðferðir og ridge-regression hafa sem markmið að auka stöðugleikann á kostnað óhlutdræginnar. Í öllum tilfellum verður að ákveða í hvað átt skuli vera hlutdrægur.

2.6 Um Kalman síu aðferðir (byggt á [3])

Kalman síu aðferðir fást við líkan á ástandsformi (e. state space form). Ástandsformið byggir á mælijöfnu:

$$\text{y}_t = \text{Z}_t\alpha_t + d_t + \varepsilon_t$$

og ástandsjöfnu

$$\alpha_t = \text{T}_t\alpha_{t-1} + c_t + \eta_t$$

$$E(\eta_t) = 0, E(\varepsilon_t) = 0$$

Gert er ráð fyrir að mælingin sé háð ástandi kerfisins. Hér er y_t hin mælda breyta og α_t er ómælanlegt ástand. Z_t lýsir áhrifum hins ómælanlega ástands á mældu breytuna. T_t er tilfærslufylki sem lýsir þróun ástandsins í tíma. Stærðirnar c_t og d_t eru fastar, hugsanlega tengdar skýristærðum. Mælingin samanstendur af falli af ástandi, $Z_t\alpha_t$, og ómælanlegu suði, ε_t, með dreifni (e. variance) H_t og ástandið á tíma t, α_t er fall af liðnu ástandi, α_{t-1} að viðbættu ómælanlegu suði, η_t, með dreifni Q_t. Breyturnar ε_t og η_t hafa sjálffylgni 0 og ekki fylgni hvor við aðra. þ.e.:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_s') = 0 \quad E(\eta_t\eta_s') = 0 \quad \text{ef t} \neq \text{s} \quad \text{og} \quad E(\varepsilon_t\eta_s') = 0 \quad \forall \text{t og s}$$

Kalman síu algoritminn er aðferð til að meta ómælanlega ástandið α_t út frá gefnum mælingum á y_t. Í stuttu máli er gangurinn þessi: Gefið er a_{t-1}, sem besta mat á α_{t-1} ástandi á tíma t-1. Dreifnifylki frávika frá besta mati er þá:

$$P_{t-1} = E(\alpha_{t-1} - a_{t-1})(\alpha_{t-1} - a_{t-1})'.$$

Að þessu gefnu er besta mat á næsta ástandi

$$a_{t|t-1} = T_t + c_t a_{t|t-1} = T_t + c_t$$

og dreifnifylki fyrir þetta mat er:

$$P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t' + Q_t$$

Kalman síu aðferðin samanstendur af spájöfnum og uppfærslujöfnum. Ofantaldar jöfnur eru spájöfnurnar. Í spájöfnunum er ástandi á tíma t spáð þegar mælingar til og með tíma t-1 liggja fyrir. Þegar ný mæling y_t bætist við er ástand endurmetið:

$$a_{t|t} = a_{t|t-1} + P_{t|t-1}F_t^{-1}(y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}Z_t'F_t^{-1}Z_t P_{t|t-1}$$

$$F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t$$

Þessar jöfnur eru nefndar uppfærslujöfnurnar, því ástandið er metið með tilliti til nýjustu mælingar. Stærðin $a_{t|t}$ er túlkuð sem mat á ástandi á tíma t gefnar upplýsingar á tíma t. Stærðin $a_{t|t-1}$ er túlkuð sem mat á ástandi á tíma t gefnar upplýsingar á tíma t-1. Metin spáskekkja er:

$$v_t = y_t - Z_t \alpha_{t|t-1} - d_t$$

Dreifni spáskekkju er F_t.

Nauðsynlegt er að gefa sér ýmsar forsendur, t.d. þarf að hafa skoðun á hvert ástandið er við tíma 0. Kalman síu er hagnýting á reglu Bayes og þegar kerfið er sett í gang er valið eitthvert byrjunargildi a_0 sem ágiskun á α_0 og P_0 dreifnifylki fyrir þá ágiskun. Þegar lítið er vitað um α_0 er eðlilegt að velja P_0 stórt, t.d. $10^{10}I$.

2.7 Tengsl Kalman síu aðferða og endurkvæmrar aðhvarfsgreiningar

Hægt er að setja upp Kalman síu þannig að það framkvæmi venjulega aðhvarfsgreiningu. Þá er ástandið látið vera óþekktur stiki og dreifnifylkið Q_t látið vera 0. Við hugsum okkur að kerfið sé þannig að ástandið sé fast, þróist ekki í tíma. Matið á ástandinu er því endurbætt með því að nota spájöfnurnar og uppfærslujöfnurnar til skiptis. Ef þessu er beitt á gagnasafn fyrir tíma $t=1, \cdots, T$ þar sem X_t inniheldur skýristærðir á tíma t þá mun matið á ástandinu við lok tímabilsins, α_T vera jafnt og venjulegur metinn aðhvarfstiki

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Þar sem $X=(X_1, \cdots, X_k)'$ er fylki skýristærða og $Y=(y_1, \cdots, y_T)'$ er vektor gilda háðu breytunnar.

Eðli upplýsingasöfnunarinnar er slíkt að í sífellu bætast við upplýsingar. Því er við hæfi að beita einhvers konar "on-line" matsaðferð. Endurkvæm aðhvarfsgreining með útreikningi á tilheyrandi endurkvæmum afgangsliðum (e. recursive residuals) er eðlileg tilraun til slíks. Endurkvæmu afgangsliðirnir skalaðir með ákveðinni stærð (f_t) eru með fast staðalfrávik og án sjálffylgni ef líkan er rétt skilgreint. Hins vegar er summa þeirra ekki endilega 0, þó væntanlegt gildi þeirra sé 0. Endurkvæma matið í lok tímabils er það sama og venjulega OLS matið og summa endurkvæmra skalaðra afgangsliða í öðru veldi er sama og summa OLS afgangsliða í öðru veldi. Hægt er að fylgjast með hvernig upplýsingar sem bætast við hafa áhrif á metna stika.Endurkvæmir afgangsliðir bjóða upp á handhægt próf, CUSUM (CUmulative Sum), til að álykta um hvort stikar líkans séu fastir yfir tímann.

Ef líkan er rétt skilgreint eru afgangsliðir í aðhvarfsgreiningu óháðir og einsdreifðir. Það þýðir að ekki koma margir afgangsliðir í röð með sama formerki og ekki er kerfi í stærð þeirra. Myndrænt próf sem hentar til að greina hvort stikar í aðhvarfsgreiningu séu fastir er svonefnt CUSUM próf. Byggir það á að reikna

$$\sum_{k+1}^{n} v_t$$

Hér er nauðsynlegt að nota endurkvæma afgangsliði, þ.e. spáskekkjur, v_t, í stað venjulegra OLS afgangsliða því venjulegir OLS afgangsliðir eru ekki óháðir. Væntanlegt gildi endurkvæmra afgangsliða er 0, en ekkert er hins vegar sem þvingar summu þeirra til að vera 0. Dreifing summunnar hegðar sér því svipað og Wiener ferli motion, random-walk) [4]. Ef gengið er út frá normaldreifingu eru mörk þannig að 5% líkur á að fara út fyrir þau í mælingu t eru skilgreind með eftirfarandi formúlu:

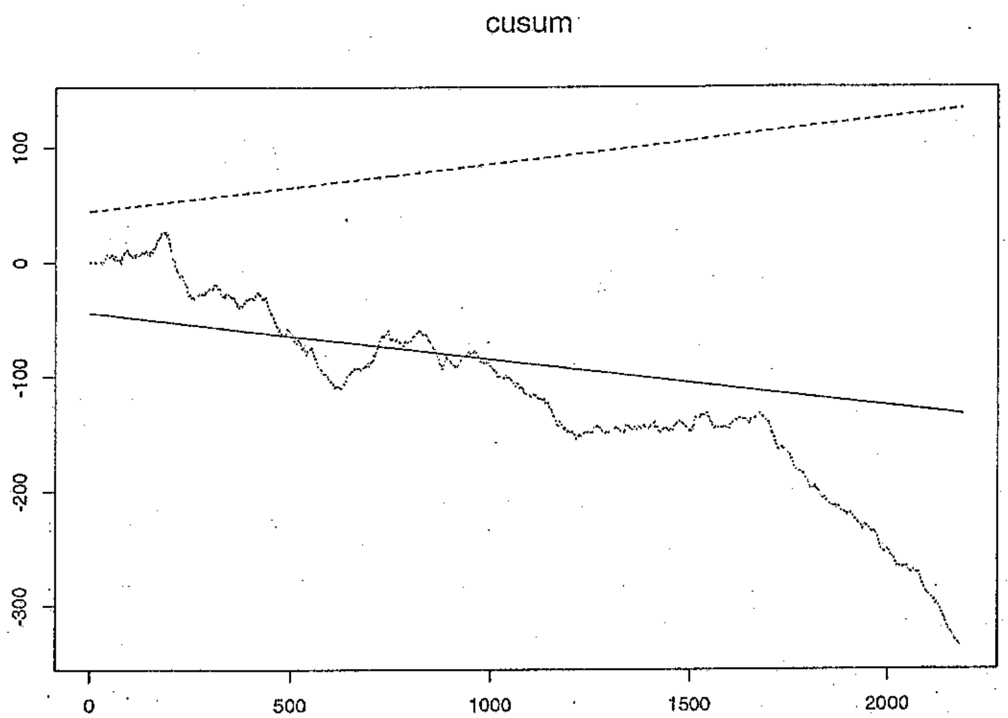
$$\pm\ (0.948\ \sqrt{n-k} + 1.896\ (t - k)\ /(n - k\ )^{1/2})$$

Hér er n fjöldi mælinga, k er númer þess mælipunkts þar sem byrjað er að safna spáskekkjum. Mynd 1 sýnir CUSUM graf fyrir einbýli og mynd 2 sýnir CUSUM graf fyrir fjölbýli, miðað við aðhvarfsgreiningu með föstum stikum yfir allt tímabilið. Beinu línurnar eru 95% mörk samkvæmt formúlunni að ofan. Báðar myndirnar gefa því vísbendingu um að kerfið sé í þróun. Á láréttu ásunum er númer mælingar og summa spáskekkja er á lóðréttu ásunum.

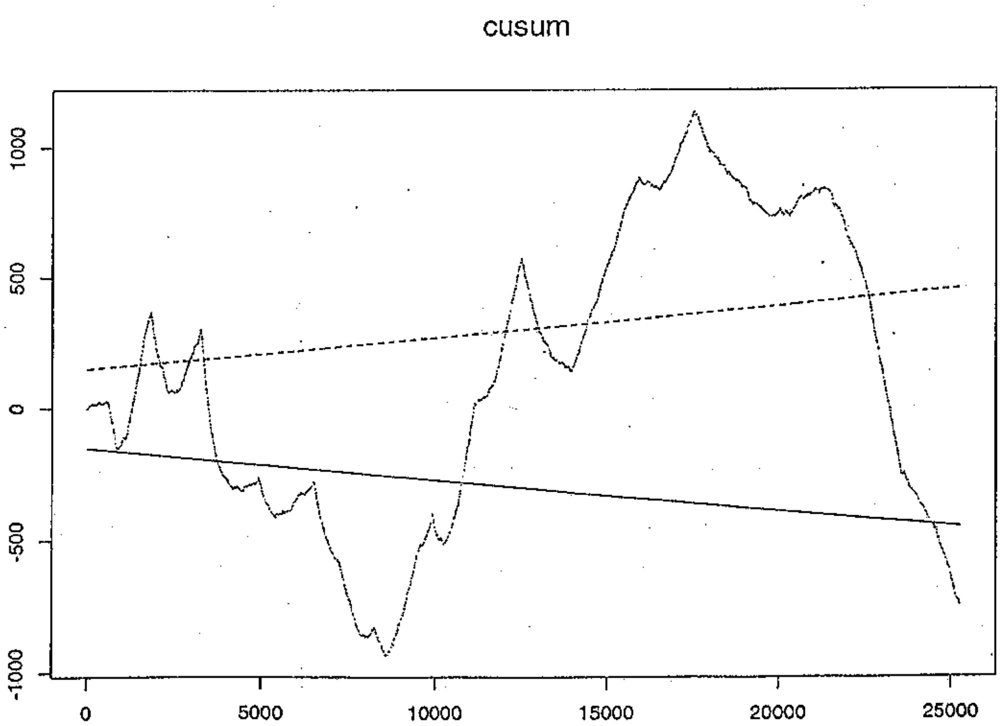
2.8 Útfærsla af Kalman síu líkani fyrir FMR

Ef skoðun gagna gefur vísbendingar um að stikar séu ekki stöðugir yfir tímann er heppilegt að framkvæma einhvers konar endurmat. Ef farin yrði sú leið að meta nýtt aðhvarfslíkan t.d. mánaðarlega er hætt við að mat yrði óstöðugt. Hér er því stungið upp á sem vinnureglu að notað sé líkan með breytilegum stikum. Kalman síu aðferðin stýrir breytingum í tíma. Uppsetningin er eftirfarandi:

1. y_{ti} = log(núvirts kaupsamnings) - log(endurstofnsverðs) á tímabili t fyrir sölu i.



Mynd 1: CUSUM fyrir einbýli 1980-1996



Mynd 2: CUSUM fyrir fjölbýli 1980-1996

2. x_{ti} = vektor af skýristærðum fyrir sölu i á tímabili t.

3. n(t) = fjöldi af sölum á tímabili t.

Hér er log, skammstöfun fyrir náttúrulegan logaritma.

Líkanið er:

$$y_{ti} = x_{ti}\alpha_{ti} + \varepsilon_{ti}$$

$$\alpha_{ti} = T\alpha_{t,i-1} + \eta_{ti} \qquad \text{ef} \quad i > 1$$

og

$$\alpha_{t1} = \alpha_{t-1,n(t-1)} + \eta_{ti} \qquad \text{ef} \quad i = 1$$

Gert er ráð fyrir að $V(\eta_{ti})$=0 ef i>1 þ.e. að stikar innan tímabils séu fastir, en að $V(\eta_{t1}) = \sigma^2 D_t$, þar sem D_t er hornalínufylki. Stökin í D_t segja til um hve mikið stikar breytast milli tímabila. Fylkið $\sigma^2 D_t$ er dreifni í "a priori" mati á breytingu ástandsins á tíma t. D_0 er valið stórt til að setja kerfið af stað. Ef öll önnur D_t eru sett 0 þá verður lokamatið á ástandinu, $a_{tn(t)}$ það sama og að framkvæmd hefði verið hefðbundin aðhvarfsgreining á öllu tímabilinu frá 1 til t. Hefðbundin aðhvarfsgreining yfir allt tímabilið samsvarar því að allar mælingar fái sama vægi, nýjar sem gamlar. Ef D_t er valið stórt þýðir það að nýleg tímabil fá þyngra vægi en eldri. Fylkið T er sett T=I, sem þýðir að stikar líkans þróast sem "random-walk" með dreifni fylki $\sigma^2 D_t$. Á hverju tímabili eru upplýsingar um markaðinn uppfærðar með reglu Bayes. "A priori" dreifingin er

$$\alpha_t \sim N(a_{t-1}, D_t + P_{t-1})$$

Liðurinn P_{t-1} er vegna þess að ástandið, α_t er ekki þekkt heldur metið með a_t. "A posteriori" dreifingin er

$$\alpha_t \sim N(a_t, \sigma^2 P_t)$$

Spáð söluverð eignar á tíma t með eiginleika x_i, miðað við að nota upplýsingar til og með tíma t-1,

$$\hat{y}_i = x_i a_{t-1}$$

Metin spáskekkja er

$$\hat{\varepsilon}_{ti} = \mathrm{y}_i - \hat{\mathrm{y}}_i$$

Afgangsliðirnir, þ.e. spáskekkja miðað við að nota upplýsingar til og með tíma t,

$$\hat{\mathrm{e}}_{ti} = \mathrm{y}_i - \mathrm{x}_i \mathrm{a}_t$$

Þegar verið er að kanna frammistöðu líkans er eðlilegt að athuga stærð spáskekkjunnar. Ef einungis eru athugaðir afgangsliðir er hætt við að dregnar yrðu ýkjukenndar ályktanir um spágetu líkans. Skýringin á því er að vektorinn af aðhvarfsstuðlum á tíma t, α_t er háður bæði y_{ti} og x_{ti}. Dreifni spáskekkju er:

$$V(\hat{\mathrm{e}}_{ti}) = \sigma^2 \mathrm{F}_{ti} = \sigma^2(1 + \mathrm{x}_{ti}' P_{t-1} \mathrm{x}_{ti})$$

Hér er gert ráð fyrir að stikinn σ, staðalfrávik mælijöfnunar sé það sama yfir allt tímabilið 0 til t og fyrir allar tegundir eigna. Slíkt einfaldar útreikninga og gerir það að verkum að ekki þarf að nota σ í ástandsjöfnunni, sjá nánar í [3]. Sjálfsagt er þó að reyna að gera sér grein fyrir hversu raunhæf sú forsenda er. Hér er gert ráð fyrir að dreifni spáskekkjunnar sé metin með

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n(t)} \sum_{i=1}^{i} n(t) \hat{\varepsilon}_{ti}^2 / F_{ti}$$

þar sem

$$F_{ti} = 1 + \mathrm{x}_{ti}' P_{t-1} \mathrm{x}_{ti}$$

Metið staðalfrávik á spáskekkju fyrir eign með eiginleika x_{ti} er því

$$\hat{\sigma}_{ti} = \hat{\sigma}_t F_{ti}^{1/2}$$

Stærðin F_{ti} er þáttur sem skalar σ_t til vegna óvissu um ástandið α_{t-1}. Ef meta á eignir á tíma t, með eiginleika x_{ti}, sem ekki voru notaðar til að reikna út a_t þá er eðlilegt að meta þær með:

$$\hat{\mathrm{y}}_{ti} = \mathrm{x}_{ti} \mathrm{a}_t$$

og að meta staðalfrávik þess með

$$\sigma - \mathrm{mat}_t = \sigma_t(1 + \mathrm{x}_{ti}' P_t \mathrm{x}_{ti})$$

Ef einsdreifni (e. homoskedasticity) er fyrir hendi í ε_{ti} þá er eðlilegt að $\hat{\varepsilon}_{ti}/F_t^{1/2}$ verði einsdreift. Til að meta misdreifni (e. heteroskedasticity) er metin eftirfarandi aðhvarfsgreining

$$\hat{\varepsilon}_{ti}^2/(F_{ti}\hat{\sigma}_t^2) = \mathrm{x}_{ti}\beta + \mathrm{u}_{ti}$$

spáð misdreifni með þessu líkani er:

$$H_{ti} = \mathrm{x}_{ti}\hat{\beta}$$

H_t verður oft í kringum 1. Ef eignir með eiginleika x, fá H-gildi sem eru lægri en 1, gefur það til kynna að líkanið spái söluverði þeirra betur en þeirra sem eru með há H-gildi.

Eignir með há H_{ti} og há F_{ti} eru verr metnar en aðrar. Eignir með hátt F-gildi eru illa metnar vegna þessa að litlum upplýsingum hefur verið safnað um eignir með tilsvarandi x-gildi. Eignir með hátt H-gildi eru illa metnar vegna þess að eignir með þau x-gildi verðleggjast mjög mismunandi á markaðnum.

3 Gagnagreining

3.1 Kaupskrá FMR

Fyrirliggjandi gögn eru kaupskrá FMR fyrir tímabilið frá 1980 til júní 1996. Form kaupskrár er sýnt í töflu 9. Skoðað var fullgert íbúðarhúsnæði á höfuðborgarsvæðinu, SVEITARFEL= 0000, 1000, 1100, 1300, 1400, 1604 og BYGGSTIG=7 eða 8. Notuð voru gildin TEGMAT=E, fyrir einbýli og TEGMAT=F, fyrir fjölbýli. Þannig eru athugaðar 38.903 sölur, 4381 í einbýli og 34522 í fjölbýli. Skilgreindar voru flokka og þrepabreytur og er þeim lýst í töflu 6. Hverfi í Reykjavík voru skilgreind með tveggja stafa staðgreini, fyrstu tveir stafir í LODR í töflu 9. Hverfin í Reykjavík voru skilgreind þannig að þau væru bæði landfræðilega samhangandi og að í hverju hverfi væri töluverð velta. Nágrannasveitarfélög Reykjavíkur mynda hvert um sig eitt hverfi. Tíðnigögn fyrir einbýli eru sýnd í töflum 10 til 45 og fyrir fjölbýli í töflum 46 til 81. Til að ná burt grófum villum voru sigtaðar út allar færslur þar sem núvirtur kaupsamningur var annað hvort meira en 100% hærri en endurstofnsverð eða meira en 50% lægri en endurstofnsverð. Við það fækkaði færslum í 37.209, 32.968 í fjölbýli og 4.241 í einbýli. Í töflu 1 eru sýnd áhrif þessarar aðgerðar fyrir þrjú tímabil. Flestar þessara færslna voru frá árunum 1980-1981. Líklegt verður að telja að hér megi greina áhrif myntbreytingarinnar 1981. Hugsanlegt er að verðlækkun miðað við endurstofnsverð eftir 1990 geri það að verkum ákveðinn fjöldi eigna seljist á undir 50% af endurstofnsverði á því tímabili.

		-85	86-90	91-	Alls
Fjölbýli	öfgakennt	1420	17	117	1554
	eðlilegt	8585	10320	14063	32968
Einbýli	öfgakennt	97	6	37	140
	eðlilegt	705	1187	2349	4241

Tafla 1: Frávik frá endurstofnsverði eftir tímabilum

3.2 Líkan fyrir frávik frá endurstofnsverði

Þróun núvirts söluverðs sem hlutfalls af endurstofnsverði er sýnt töflum 3 og 4 fyrir fjölbýli og 5 fyrir einbýli. Sýndir eru kvantílar, Q10=það gildi sem 10% eru fyrir neðan, Q50= það gildi sem 50% eru fyrir neðan og Q90= það gildi sem 90% eru fyrir neðan. Mánaðarleg velta einbýla er af stærðargráðunni fáeinir tugir svo slík mynd er afar rykjótt og því látið nægja að sýna þróunina fyrir hvert ár. Þróun stærðardreifingar er lýst með myndum 9 og 10 fyrir einbýli og 11 og 12 fyrir fjölbýli.

Þróun fjölda íbúðarkaupa í tíma er sýnd á mynd 8 fyrir einbýli og myndum 6 og 7 fyrir fjölbýli. Þróun í stærðardreifingu er sýnd á myndum 9 og 10 fyrir einbýli og 11 og 12 fyrir fjölbýli.

Í myndum 1 og 2 er sýndar CUSUM myndir fyrir aðhvarfsgreiningu með föstum stikum. Af þeim má álykta að nota beri líkan sem breytist í tíma. Í myndum 13, 14, 15 og 16 eru sýndar dreifingar á ε_{ti}. Þessar myndir gefa ekki til kynna að misdreifni í tíma sé mikið vandamál. Á myndum eins og 3 og 15 má sjá áhrif verðbólgu innan árs. Endurstofnsverð er uppfært einu sinni á ári og því fer frávik söluverðs frá endurstofnsverði vaxandi fram eftir ári þar til að nýrra, og hærra endurstofnsverð tekur gildi. Líkanið með breytilegu stikunum nær þessu upp í næsta mánuði á eftir. Þessir þættir eru ekki eins sýnilegir fyrir einbýlin, sjá mynd 13.

Töflur eins og tafla 2 og 3 geta verið varhugaverðar því þær sýna dreifingu yfir tímabilið í heild. Til að gera sér betur grein fyrir þróun spáskekkju í tíma er vert að líta á myndir 13, 14, 15 og 16. Af þeim myndum má sjá að stærð spáskekkjunnar virðist nokkuð stöðug í tíma, 80% virðist liggja milli ca. 20% vanmats og ca. 15% ofmats fyrir einbýli og heldur þrengri mörk fyrir fjölbýli.

Uppfærsla líkans í tíma

Þegar framkvæmd hefur verið aðhvarfsgreining eru niðurstöður á forminu $\hat{\alpha}$, mat stikavektors og V($\hat{\alpha}$), dreifnifylki stikavektors. Notkun á reglu Bayes til að auka stöðugleika mats er þannig að þegar sala í nýjum mánuði er skráð þá er fyrirfram reiknað með því að parametrar í þeim mánuði séu tengdir hinum fyrri. Tengslin eru mynduð með reglu Bayes þannig að við upphaf nýs mánaðar t, er 'a priori' dreifing parametervektorsins normaldreifing:

$$N(\hat{\alpha}_{t-1}, V(\hat{\alpha}_{t-1}) + D_t)$$

þar sem D_t er hornalínufylki. Ef $D_1=\infty$ (eða mjög stór tala t.d. 10^{10}) öll önnur $D_t=0$ þá er 'a posteriori' mat á α það sama og ef að venjulegur OLS metill hefði verið notaður fyrir öll tímabilin. Ef öll D_t eru valin stór nálgast það að framkvæma aðhvarfsgreiningu á hverju tímabili. Hér var D látið vera á forminu kD. D var hornalínufylki og voru stökin fengin með svipuðum aðferðum og í [8]. Talan k er "smoothing" fasti. Hún setur vog í "a priori" upplýsingar um ástand á markaðnum. k=0 þýðir að gamlar upplýsingar vega jafnt þungt og nýjar k>0, þýðir að fortíðar upplýsingar fá stiglækkandi vikt með tíma. Talan k=0, þýðir, að gert er ráð fyrir að ástandið sé óbreytt, aðeins þarf að fá nákvæmari upplýsingar um það. Mjög stórt k þýðir að gert er ráð fyrir að fortíðin segi lítið um núverandi ástand. Að lokinni forrannsókn var valið sem grunnur, líkan sem inniheldur stærð í fermetrum og aldur í árum. Stærð og aldur voru teknar inn sem þrepabreytur með hliðarskilyrði um að frávik frá endurstofnsverði sé samfellt fall af stærð og aldri. Hliðarskilyrðið að væntanlegt frávik frá endurstofnsverði sé samfellt sem fall af aldri er fengið með því að skilgreina fylkið R (sbr. kafla 2, 10x20 fylki þannig að

R[1,3]=-1 R[1,9]=-log(70) R[2,3]=1 R[2,9]=log(110) R[2,4]=-1 R[2,10]=-log(110),

R[3,4]=1 R[3,10]=log(150) R[3,5]=-1 R[3,11]=-log(150),

R[4,5]=1 R[4,11]=log(210) R[4,6]=-1 R[4,12]=-log(210), R[5,6]=1 R[5,12]=log(270) R[5,7]=-1 R[5,13]=-log(270),

R[6,7]=1 R[6,13]=log(370) R[6,8]=-1 R[6,14]=-log(370),

R[7,1]=1 R[7,19]=2 R[7,18]=-1 R[7,23]=-2,

R[8,18]=1 R[8,23]=5 R[8,17]=-1 R[8,22]=-5,

R[9,17]=1 R[9,22]=10 R[9,16]=-1 R[9,21]=-10,

R[10,16]=1 R[10,21]=20 R[10,15]=-1 R[10,20]=-20

Við þetta er væntanlegt stærðarfrávik samsett úr línum sem tengjast í 70, 110, 150, 210, 270 og 370 fermetrum. Á sama hátt er aldursfallið lína sem brotnar í 2, 5, 10 og 20 árum:

	k				
	0	0.01	0.1	1	10
$\bar{e}$	-0.0316	-0.0120	-0.0043	0.0001	0.0001
$\bar{\varepsilon}$	-0.0331	-0.0140	-0.0064	-0.0028	-0.0028
$\hat{\sigma}_e$	0.1713	0.1620	0.1565	0.1497	0.1497
$\hat{\sigma}_\varepsilon$	0.1912	0.1820	0.1764	0.1699	0.1699
$q_{.05}(e)$	-0.3050	-0.2741	-0.2585	-0.2432	-0.2432
$q_{.05}(\varepsilon)$	-0.3231	-0.2968	-0.2871	-0.2866	-0.2866
$q_{.95}(e)$	0.2424	0.2413	0.2349	0.2270	0.2270
$q_{.95}(\varepsilon)$	0.2542	0.2519	0.2472	0.2394	0.2394

Tafla 2: Eiginleikar spáskekkju og afgangsliða í fjölbýli fyrir ýmis k.

Ef forsendur um einsdreifni eru uppfylltar er dreifni spáskekkjunnar:

$$V(\hat{\varepsilon}_{ti}) = \sigma^2 F_{ti}$$

Til að meta misdreifni var eftirfarandi aðhvarfsgreining framkvæmd:

$$\hat{\varepsilon}_{ti}^2/(F_{ti}\hat{\sigma}^2) = \mathrm{x}_{ti}\beta + u_{ti}$$

Misdreifniþátturinn $\mathrm{H}_{ti}=\mathrm{x}_{ti}\hat{\beta}$ er mælikvarði á hversu mikil verðbreidd er í eignum með tiltekin x-gildi=x_{ti}. Fyrir einbýli var R^2=0.06 og fyrir fjölbýli R^2=0.20. Frá því má álykta að eignir í fjölbýli hafa marktækari misdreifni en einbýli. Þessi tvö R^2 gildi sýna að misdreifni sem fall af x-breytum er ekki mikil.

Ef nýjar skýribreytur innihalda upplýsingar sem að gagni geta komið verða þær að geta spáð því sem óskýrt er. Því var framkvæmd eftirfarandi aðhvarfsgreining:

$$\hat{\varepsilon}_{ti}/(F_{ti}H_{ti})^{1/2} = z_{ti}\gamma + v_{ti}$$

Af töflu 4 má sjá áhrif þess að bæta við breytum. Breytan z_{ti} hér að ofan táknar eina af breytunum í töflu 4. Gildin R^2 gefa til kynna hversu mikið spágeta líkansins myndi batna ef viðkomandi breytu yrði bætt við. F-gildið gefur til kynna tölfræðilega marktækni viðbótarbreytunnar, þeim mun hærra F-gildi, þeim mun meiri marktækni. F-Chow gildin eru prófstærðir sem prófa hvort parametrar séu eins þegar gögnum er skipt í tvennt. Hér var gögnum skipt þannig að gögn á tímabili 1 voru gögn fyrir 1991 og á tímabili 2 voru gögn frá 1991 og síðar. Frá myndunum 3 og 15 má ætla að markaðsumhverfið hafi verið talsvert annað á verðbólgutímum og tímum nýrra lánakerfa. Niðurstaða fyrir bæði einbýli og fjölbýli er að sú breyta sem bætir spágetuna mest er hverfið. Þýðing hverfisbreytunnar virðist einnig breytast með tíma bæði í einbýli og fjölbýli. Eðlilegt er því að prófa næst líkan sem inniheldur hverfi/sveitarfélag sem breytu og að láta parameter við þá breytu þróast í tíma.

	k				
	0	0.01	0.1	1	10
$\bar{e}$	-0.0627	-0.0377	-0.0163	-0.0047	-0.0007
$\bar{\varepsilon}$	-0.0627	-0.0385	-0.0177	-0.0066	-0.0031
$\hat{\sigma}_e$	0.1805	0.1692	0.1631	0.1576	0.1515
$\hat{\sigma}_\varepsilon$	0.2030	0.1918	0.1860	0.1832	0.1838
$q_{.05}(e)$	-0.3512	-0.3154	-0.2873	-0.2691	-0.2544
$q_{.05}(\varepsilon)$	-0.3762	-0.3386	-0.3164	-0.3042	-0.3042
$q_{.95}(e)$	0.2373	0.2359	0.2421	0.2473	0.2418
$q_{.95}(\varepsilon)$	0.2720	0.2650	0.2682	0.2785	0.2819

Tafla 3: Eiginleikar spáskekkju og afgangsliða í einbýli fyrir ýmis k.

Viðbótarbreyta	Fjölbýli F-gildi	Fjölbýli R^2-gildi	Einbýli F-gildi	Einbýli R^2-gildi	Fjölbýli F-Chow	Einbýli F-Chow
Stærð og aldur	6.33	0.0043	5.17	0.0247	1.13	7.36
Hverfi/sveitarfélag	62.93	0.0261	16.06	0.0479	7.67	42.43
Efni útveggja	49.88	0.0014	8.231	0.0046	0.15	1.80
Hæðarnúmer	13.71	0.0022	3.20	0.0009	0.01	0.36
Afstaða	41.35	0.0025	47.04	0.0207	0.21	0.04
Fjöldi hæða	20.90	0.0018	20.14	0.0113	0.91	3.72
Fjöldi herbergja	8.09	0.0009	2.27	0.0028	0.54	4.97
Fjöldi eininga	6.15	0.0003	16.31	0.0017	0.00	0.00
Athugasemd	0.01	0.0000	0.19	0.0001	0.13	0.13
Bílskúr/kjallari	33.19	0.0029	26.96	0.01609	0.40	8.63

Tafla 4: Áhrif viðbótarbreyta.

3.3 Líkan án endurstofnsverðs

Við skoðun á mynd 15 sést að það virtist ekki spilla mikið fyrir líkaninu þótt verðbólga væri mikil en endurstofnsverðið fast mestan hluta ársins. Líkanið spáir alltof miklu fráviki frá endurstofnsverði í þeim mánuði sem nýja endurstofnsverðið kemur. Slíkar villur í spá eru eðlilegar þegar viðmiðuninni, endurstofnsverðinu er skyndilega skotið upp um tugi prósenta. Hugsanlega mætti endurbæta þetta með því t.d. að láta framfærsluvísitölu eða annan verðlagsmælikvarða í líkanið. Þetta leiðir hugann að því hvernig líkanið stæði sig í að spá verðinu beint út frá liðnum atburðum á markaðnum og eiginleikum íbúðarinnar, þ.e. að hafa innbyggðan verðlagsmælikvarða í líkaninu. Þessi innbyggði verðlagsmælikvarði yrði þá hreinn fasteignamarkaðsmælikvarði. Inn í líkanið fara eingöngu upplýsingar um sölu á fasteignum svo aðrar verðlagsbreytingar trufla ekki matið. Við verðbólgulíkanagerð er stundum notast við einhvers konar "random walk" líkan sem grunn. Hér verður byrjað þar sem staðar var numið í 3.2 og byrjað með þær breytur sem þar voru taldar mikilvægar. Ef til viðbótar finnast mikilvægar breytur þá má ætla að þær breytur hafi verið í endurstofnsverðinu. Breytur, sem eru teknar með, eru því fyrir fjölbýli, stærð, aldur og hverfi. Frammistaða líkans er slæm í fyrstu mælingunum á meðan líkanið er að safna upplýsingum um markaðinn. Fyrir einbýli er marktækasta viðbótarbreytan efni útveggja.

	með		án	
	fjölbýli	einbýli	fjölbýli	einbýli
$\bar{e}$	-0.0011	-0.0031	0.0054	0.0132
$\bar{\varepsilon}$	-0.0037	-0.0032	0.01130	0.0183
$\hat{\sigma}_e$	0.1405	0.1358	0.1475	0.1566
$\hat{\sigma}_\varepsilon$	0.1495	0.1546	0.1557	0.1861
$q_{.05}(e)$	-0.2315	-0.2366	-0.2347	-0.2454
$q_{.05}(\varepsilon)$	-0.2548	-0.2597	-0.2372	-0.2730
$q_{.95}(e)$	0.2127	0.2027	0.2190	0.2558
$q_{.95}(\varepsilon)$	0.2217	0.2237	0.2348	0.2869

Tafla 5: Samanburður á spáskekkju og afgangsliðum með og án endurstofnsverðs.

3.4 Tillaga að vinnsluflæði hjá FMR

Í grófum dráttum gæti ferlið verið þannig að breytingar á markaðnum eru greindar úr kaupskrá og síðan er mat eigna í eignaskrá uppfært samkvæmt því. Allar upplýsingar um markaðinn verður að sía út úr kaupskránni og því mikilvægt að hafa gæðaeftirlit með því sem þar fer inn. Síðan er núverandi mat á ástandi markaðar uppfært með nýjustu upplýsingum. Þetta mat á ástandinu, þ.e. stikarnir úr aðhvarfsgreiningunni, er síðan notað til að fá nýtt markaðsmat á eignaskránni. Þetta mætti setja upp sem þrjú skref eða forrit (F1, F2 og F3).

Forrit númer 1 tekur gögn inn á kaupskrárformi og les ár og mánuð sem nota á til grundvallar og einnig metið ástand úr skrám sem fyrir liggja og skrifar síðan út:

tilvísunarnúmer mat eignar H_{ti} F_{ti} $\hat{\varepsilon}_{ti}$

Hugsanlega mætti bæta við:

$h_{ti} \quad h_{ti}/(1-h_{ti})\hat{\varepsilon}_{ti}$

Þar sem h_{ti} er hornalínustak úr hat-fylki. Stærðirnar H_{ti} og F_{ti} eru misdreifnistuðlar sem gefa til kynna hversu gott matið er. Eignir með stór H_{ti} eru hlutfallslega illa metnar vegna þess að eignir með þá x_{ti}-eiginleika verðleggjast á breiðu bili. Eignir með stór F_{ti} eru illa metnar vegna þess að líkanið hefur ekki náð að safna nægum upplýsingum um eignir með eiginleika x_{ti}. Hugmyndin hér er að sjá hvaða eignir höfðu stórt frávik, ε_{ti}. Ef menn grunaði að mikilvæga breytu vantaði í líkanið, t.d. upplýsingar um ástand eignar, þá ætti hún að geta skýrt frávikið. Hugsanlegt er að misdreifnin sé mismunandi eftir hverfum og aldri og ætti það að sýna sig í að H_{ti} er stærra fyrir sum hverfi. H_{ti} er útkoma úr aðhvarfsgreiningu þar sem frávikið í öðru veldi er skýrt með x-breytunum. Með því að reikna það, er hægt að fá vísbendingar um hvort t.d. eldri hús séu breytilegri en yngri, eins og hægt væri að ímynda sér þar sem sum eldri hús eru mikið endurnýjuð en önnur lítið. Þetta forrit má nota bæði til að meta úr eignaskrá og einnig til að gæðaprófa t.d. kaupskrá með nýjustu upplýsingum.

Forrit númer 2 les skrá með nýjum færslum úr kaupskrá og notar þær til að uppfæra upplýsingar um ástand markaðarins. Þ.e. les inn α_{t-1} og P_{t-1}, upplýsingar um ástandið á tíma t-1, les gögnin frá tíma t og uppfærir upplýsingarnar um markaðinn. Það reiknar α_t og P_t. Þessar stærðir eru síðan færðar í skrá svo hin forritin geti notað þau.

Forrit númer 3 framkvæmir aðeins ítarlegri greiningu á nýjum gögnum úr kaupskrá. Það reiknar sama og forrit 1 að frátaldri spáskekkjunni. Spáskekkjan er ekki með hér því hér er ekki til staðar nýlegt verð. Sérstök útfærsla er fyrir einbýli og önnur fyrir fjölbýli. Heppilegur gangur í gagnavinnslu gæti verið að byggja upp sögulegt líkan, eins og hér að ofan. Síðan er valinn einhver tímapunktur og hver kaupskrármánuður eftir það keyrður gegnum forrit 1 og/eða 3. Þær færslur sem standast gæðakröfur eru síðan notaðar til að uppfæra upplýsingarnar. Líkanið, sérstaklega sú útfærsla sem ekki notar endurstofnsverð, er viðkvæmt fyrir röngum mælingum og mikilvægt að sem minnst af slíku sé lagt til grundvallar mati á ástandi markaðarins.

4 Umræður og niðurstöður

Markaður með vörur og þjónustu þróast í tíma. Þess vegna er eðlilegt að gera ráð fyrir að stikar í aðhvarfsgreiningu séu ekki fastir. Því er ljóst að reglulega verður að endurmeta líkanið. Ef metið væri nýtt líkan á hverju ári væri eldri upplýsingum hent og niðurstaðan sennilega mjög óstöðugt mat. Önnur leið væri að vega fyrri upplýsingar saman við nýjar upplýsingar. Sú leið er farin hér og með því að láta stika þróast sem "random walk". Þróun stika er stýrt með Kalman síu aðferðinni. Til grundvallar eru gögn úr kaupskrá fasteignamats ríkisins. Í fyrstu var hér leitast við að skýra frávik söluverðs frá endurstofnsverði. Á Íslandi er endurstofnsverð hverrar eignar reiknað út frá eiginleikum eignar og verðlagi hvers árs. Það inniheldur því bæði upplýsingar um hverja eign og um gildandi verðlag. Í rannsóknum af þessu tagi er marglínuleiki (e. multicollinearity) vandamál. Erfitt er að gera grein fyrir að fermetraverð í bílskúr eða kjallara sé mikið frábrugðið því sem er í íbúð (hugsanlegt er að kjallari sé íbúðarhæfur). Fermetraverð fer lækkandi eftir því sem þeir eru fleiri og einmitt í þeim eignum er oft bílskúr eða kjallari. T.d. voru á árunum 1995 og 1996 skráðar 796 sölur á einbýlishúsum á höfuðborgarsvæðinu þar sem hægt er að sundurgreina flatarmál í íbúð, kjallara og bílskúr. Af þessum 796 hafa 128 hvorki kjallara né bílskúr og er meðalflatarmál þeirra 118 m^2. Meðalflatarmál hinna 668 er hins vegar 205 m^2. Breytan bílskúr og breytan stærð eru því torsundurgreindar, sér í lagi ef fermetrar 150-210 eru verðlagðir með sérstökum hætti. Hér er hugsanlegt að minnka þennan vanda með notkun endurstofnsverðsins. Hér voru bæði gerð líkön til að spá fráviki frá endurstofnsverði og að að spá söluverði beint án þess að nota endurstofnsverðið, þ.e. að taka eiginleika eignar inn sem skýristærðir og að láta Kalman síu aðferðina elta verðbólguna. Virðist sú aðferð óverulega síðri, sérstaklega í fjölbýli. Þó svo að meðaltali virðist ekki mikill munur á stærð spáskekkju eftir því hvor aðferðin er notuð getur munað miklu á einstökum eignum. Athugun á 263 einbýlum sem seld voru í janúar til júlí 1996, metnum með ástandi markaðar í júlí 1996, sýndu að fylgni í spáskekkju milli einnar aðferðar með endurstofnsverði og annarrar án endurstofnsverðs af stærðargráðunni 0.5-0.6 og fylgni í spáðu söluverði upp á 0.8-0.9. Það þýðir að fyrir kemur t.d. að eign er metin 10 milljónir með annarri aðferðinni og 13 milljónir með hinni. Að meðaltali ofmat aðferðin án endurstofnsverðs 7.1% og aðferðin með endurstofnsverði 6.6%. Meðalfrávik var 13.8% með endurstofnsverði og 16.5% án. Samanburður af þessu tagi er erfiður því eðli líkananna er ólíkt. Í líkani með mörgum skýristærðum verður að setja fastann k lágan til að hamla flökti í stikum og það þýðir tregari markaðsaðlögun í tíma. Sjónarmið er, að mánaðarlegar breytingar á markaði séu of tíðar, þ.e. ekki sé hægt að meta skynsamlega ástand markaðar mánaðarlega. Þetta dæmi hér talar gegn því þar sem ofmatið á tímabilinu janúar-júlí sem fékkst með því að nota ástandið í júlí, var að mestu leyti vegna janúar til mars. Á því tímabili voru margar neikvæðar spáskekkjur (verð - spá negatívt, þ.e. ofmat).

Misdreifni virðist ekki áberandi í gögnum FMR, hvorki í tíma, né eftir skýristærðum. Virðist það gefa vísbendingu um að verðmunur milli t.d. eldri eigna innbyrðis sé ekki mikið frábrugðinn verðmun milli nýrri eigna innbyrðis. Ef menn hugsa sér að eldri eignir séu annað hvort mikið endurnýjaðar og þar með dýrar eða mikið slitnar og þar með ódýrar þá fundust ekki vísbendingar um það hér. Sömuleiðis virðist sem efnahagsástand, hagsveiflur og kjör á lánamarkaði, stærðir sem einkenna ákveðin tímabil, hafi lítil áhrif á verðbil á fasteignamarkaði. Hugsanlegt er þó að þessar stærðir hafi áhrif á sölutíðni.

Hér var ekki tekið tillit til sölutíðni á markaðinum. En eðlilegt er að telja að slíkt hafi áhrif á söluverð. Möguleg útfærsla væri að bæta við líkanið "intensity" jöfnu þar sem fjöldi sala væri metinn sem einhvers konar Poisson ferli. Væntanleg sölutíðni yrði þá skýrð með einhverjum x-breytum, hugsanlega liðnum verðum og liðnum tíðnigildum. Ef slíkt yrði tekið inn í verðmat er hugsanlegt að tregseljanlegar eignir yrðu metnar niður.

Helsta endurbót á líkani virðist samkvæmt greiningu með aðferðum eins og lýst er í kafla 3.2 vera að bæta formið á tengslum stærðar og verðs og aldurs og verðs. Hér var valið formið, samtengdar beinar línur. Hugsanlegt er að ekki sé hægt að finna neitt form sem er algjörlega fullnægjandi. E.t.v. ætti hér að reyna að meta einhver "smooth" óparametrísk form. Slíku hefur verið lýst í [2]. Einnig mætti segja svipað um hverfabreytuna. Hið æskilega væri hugsanlega að geta sett hverfið beint inn sem hnit á landakorti og spá síðan verði í tiltekinni hnit með söluvirði í nálægum hnitum. Þetta kallar á sérstaka tölfræðitækni, "spatial statistics" eða rúmtölfræði [1].

Ef meta á eignir eftir sölum á markaði krefst það góðra upplýsinga um það sem gerist á markaðinum. Gæði matsins ráðast af því hversu rétt breytur eru skráðar í kaupskrá og hversu mikilvægar þær eru. Ferlið sem stungið er upp á í 3.4 er hugmynd að því hvernig hægt er að ganga til verks. Þetta eru í aðalatriðum þrjú skref, mæling á markaði, uppfærsla mats á ástandi markaðar og að lokum reikna verðspá fyrir sérhverja eign. Í kafla 3.4 var stungið upp á þrem forritum en auðvitað eru mjög margar útfærslur hugsanlegar hér. Gæðaeftirlitið er í skrefi 1, en hugsanlegt er að skoða öfgakenndustu frávikin, og athuga hvort x-breyturnar séu virkilega réttar á þeim eignum eða jafnvel sleppa þeim og setja þær ekki í skref 2.

Líkan á ástands-formi (e. state space form) hentar fyrir Kalman síu aðferðina. Það er hins vegar ekki í stakk búið til að mæta skyndilegum áföllum í þeirri mynd sem það er sett fram hér. Það myndi t.d. ekki ráða við verðhrun eins og hafa orðið í Noregi og Svíþjóð á nýliðnum árum. Hafa ber þó í huga að árin fyrir hrunið hafði verð hækkað mjög mikið, hugsanlega vegna blöndu af spákaupmennsku og ógætilegri útlánahegðun norrænna banka ([9] og [10]). Á Íslandi hafa þau skilyrði ekki skapast enn. Ljóst er að tölfræðilegt líkan getur gefið gagnlegar vísbendingar um fasteignaverð. Líkan sem notar endurstofnsverð sem viðmiðun og leiðréttir það smám saman með random-walk ferli sýnist vera stöðugt. Jafnvel án endurstofnsverðs virðist sem random-walk ferli nái verðþróun markaðarins. Þetta virðist sér í lagi eiga við um fjölbýlishúsin. Einhverjar aukaforsendur virðist vanta um einbýlishúsin til að líkan án endurstofnsverðs sé jafngott líkani sem hefur endurstofnsverð sem viðmiðun. Hafa ber þó í huga að líkanið í kafla 3.3 var ekki bestað með tilliti til k, smoothing stikans.Og líkanið í kafla 3.2 var einungis gróf-bestað með tilliti til k. Ekki hefur í þessum reikningum verið gerð nein hreinsun á gögnunum önnur en að öfgakennd frávik söluverðs frá endurstofnsverði voru ekki tekin með. Flest þeirra voru trúlega vegna rangra skráninga í tengslum við myntbreytinguna 1981. Það að öfgakenndum frávikum hefur verið hent gerir þörfina á að vera á varðbergi gagnvart "outliers" litla. Sú þörf er hins vegar til staðar þegar líkan án endurstofnsverðs er metið. Ég hef gert tilraunir með "robust" (þolnar) aðferðir sem vikta niður mælingu ef spáð frávik er öfgakennt.

Heimildir

[1] N.A. Cressie. *Statistics for Spatial Data.* John Wiley and Sons, 1993.

[2] W. Hardle. *Smoothing Techiques: with Implementation in S.* Springer, 1991.

[3] A.C. Harvey. *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter.* Cambridge University Press, 1989.

[4] A.C. Harvey. *The Analysis of Econometric Time Series.* Philip Allan, 1990.

[5] C.F. Sirmans John R. Knight, Carter R. Hill. Stein rule estimation in real estate appraisal. *The appraisal journal*, 61(4):539, OCT 1993.

[6] G.G. Judge and M.E. Bock. *The Statistical Implications of Pre-Test and Stein-Rule Estimators in Econometrics.* North-Holland, 1978.

[7] H-B Kang and A.K. Reichert. An empirical analysis of hedonic regression and grid-adjustment techniques in real estate appraisal. *AREUEA Journal*, 19(1):70–91, 1991.

[8] G. Kitagawa and W. Gersch. A smoothness priors time varying ar coefficient modeling of nonstationary series. *IEEE Trans. Autom.*, AC30:48–56, 1985.

[9] H. Koskenkyla. The nordic banking crisis. *Bank of Finland Bulletin*, 68(8), August 1994.

[10] H. Koskenkyla. The condition of nordic banks and future prospects post-crisis. *Bank of Finland Bulletin*, 69(8), August 1995.

[11] C.A. Moore. Appraisers, appraisal, and appraisal reports. *The Real Estate Finance Journal*, Winter 1996.

[12] T.G. Thibodeau S.T. Croisson, C.G. Dannis. Regression analysis: A cost-effective approach for the valuation of commercial property portfolios. *Real Estate Finance*, Winter 1996.

A Forrit

1. Forrit sem les inn nýseldar eignir, framkvæmir frumgreiningu, reiknar spá, H_t, F_t, q_t og ε_t. Forritið les:

   - INPUT.DAT sölur í mánuði á kaupskrár formati
   - BRPAR1.DAT nýjustu aðhvarfsstika
   - YYINV.DAT nýjasta mat á dreifnifylki
   - BETAISH.DAT upplýsingar um misdreifnimynstur

   forritið skrifar skrá, OUTPUT.DAT með eftirtöldum breytum:

2. tilvísunarnúmeri

3. söluverði

4. spáðu söluverði

5. H_{ti} mati á misdreifni vegna x-breyta

6. f_{ti} mati á misdreifni vegna magns upplýsinga

7. $\hat{\varepsilon}_{ti}$ spáskekkju

   Athugasemdir: Misdreifnistuðullinn H er ekki skalaður, þ.e. þarf ekkert endilega að vera nálægt 1. Þessi stærð er ekki talin virka mjög vel í þeim forritum sem hafa verið prófuð.

8. Forrit sem uppfærir kerfið, þ.e. les α_{t-1} og P_{t-1} reiknar nýtt α_t og nýtt P_t. Forritið les:

   - INPUT.DAT, kaupskrá nýs mánaðar
   - BRPARZ1.DAT α^*_{t-1} mat á liðnu ástandi
   - YYINV.DAT P_{t-1} mat á dreifnifylki liðins ástands
   - SMOOTH.DAT fastinn k, sem stýrir hraða markaðsaðlögunar
   - BREYTUR.DAT skrá sem segir til um hvaða breytur skuli nota

Forritið bætir α_t^* við skrána BRPARZ1.DAT og P_t við skrána YYINV.DAT

Athugasemd: Þetta forrit vinnur með skilyrtum stikum, þ.e. búið er að þvinga spáð verð til að vera samfellt fall af stærð og aldri. Vídd vektorsins α_t^* er því fjöldi parametra að frádregnum fjölda hliðarskilyrða (10). Á sama hátt er vídd dreifnifylkisins, P_t, skilgreind. Óskilyrtir stikar eru geymdir í BRPAR1.DAT. Hér er mikilvægt að gæta þess að BRPARZ1.DAT og YYINV.DAT innihaldi upplýsingar um rétta tímapunkta. Skrárnar BRPARZ1.DAT og YYINV.DAT verða að vera réttar miðað við fjölda breyta. Ef meta á líkan með öðrum breytum er skynsamlegt að nota stórt gagnasett, velja k stórt í byrjun, og gæta þess að BRPARZ1.DAT og YYINV.DAT séu til og af réttri stærð.

9. Forrit sem reiknar mat í gefnum mánuði á gefnu ári. Forritið les:

- Af skjá, mánuð og ár.
- INPUT.DAT skrá á kaupskrárformi yfir eignir sem meta skal
- $\alpha_{ar,man}$ úr BRPAR1.DAT, $P_{ar,man}$ úr YYINV.DAT

Forritið skrifar OUTPUT.DAT með

- tilvísunarnúmeri
- spáðu sölvirði á gefnum tíma
- H_t, f_t

Athugasemd: Alveg eins og forrit 1 nema reiknar ekki spáskekkju.

B Töflur

Tafla 6: Skilgreining á breytum

Y = logaritmi núvirts söluverðs	E = logaritmi endurstofnsverðs
1 = fasti tekur gildið 1	x_1 = Stærð í fermetrum
Hverfi	
x_2 = hverfi 12	x_3 = hverfi 13
x_4 = hverfi 14	x_5 = hverfi 15 og 16
x_6 = hverfi 17	x_7 = hverfi 18
x_8 = hverfi 22 - 28	x_9 = hverfi 41, 42, 43, 47
x10 = hverfi 46, 49	
Byggingarár	
x_{11} = 1951-1960	x_{12} = 1961-1970
x_{13} = 1971-1975	x_{14} = 1976-1980
x_{15} = 1981-1985	x_{16} = 1986-1990
x_{17} = 1991-	
Aldur	
x_{18} = 11 - 20 ára	x_{19} = 6 - 10 ára
x_{20} = 2 - 5 ára	x_{21} = 0 - 2 ára
x_{22} = aldur í árum	
Athugasemd	
x_{23} = athugasemd=4, makaskipti	x_{24} = athugasemd=7, makaskipti
Fjöldi herbergja	
x_{25} = fjöldi herbergja <=2	x_{26} = fjöldi herbergja=3
x_{27} = fjöldi herbergja=4	x_{28} = fjöldi herbergja=5 eða 6
Stærð sem þrepabreyta	
x_{29} = 70-100 fermetrar	x_{30} = 110-150 fermetrar
x_{31} = 150-210 fermetrar	x_{32} = 210-270 fermetrar
x_{33} = 270-370 fermetrar	x_{34} = 370+ fermetrar

Tafla 7: Skilgreining á stærðar- og aldursbreytum í aðhvarfsgreiningu

$y = \log(\text{NÚVS}) - \log(\text{EST})$	
$x_1 = 1$	$x_2 = \log(m^2)$
$x_3 = 1$ ef $70<m^2<100$	$x_4=1$ ef $100< m^2<150$
$x_5 = 1$ ef $150 < m^2 < 210$	$x_6 = 1$ ef $210 < m^2 < 270$
$x_7 = 1$ ef $270 < m^2 < 370$	$x_8 =1$ ef $m^2>370$
$x_9 = x_2{}^*x_3$	$x_{10}=x_2{}^*x_4$
$x_{11}= x_2{}^*x_5$	$x_{12}=x_2{}^*x_6$
$x_{13} = x_2{}^*x_7$	$x_{14}=x_2{}^*x_8$
$x_{15}= 1$ ef aldur < 5	$x_{16} = 1$ ef $5 <$ aldur < 10
$x_{17} = 1$ ef $10 <$ aldur < 20	$x_{18}=1$ e< aldur > 20
x_{19} = aldur í árum $x_{20} =x_{19}{}^*x_{15}$	
$x_{21}= x_{19}{}^*x_{16}$	$x_{22} = x_{19}{}^*x_{17}$
$x_{23} = x_{19}{}^*x_{18}$	

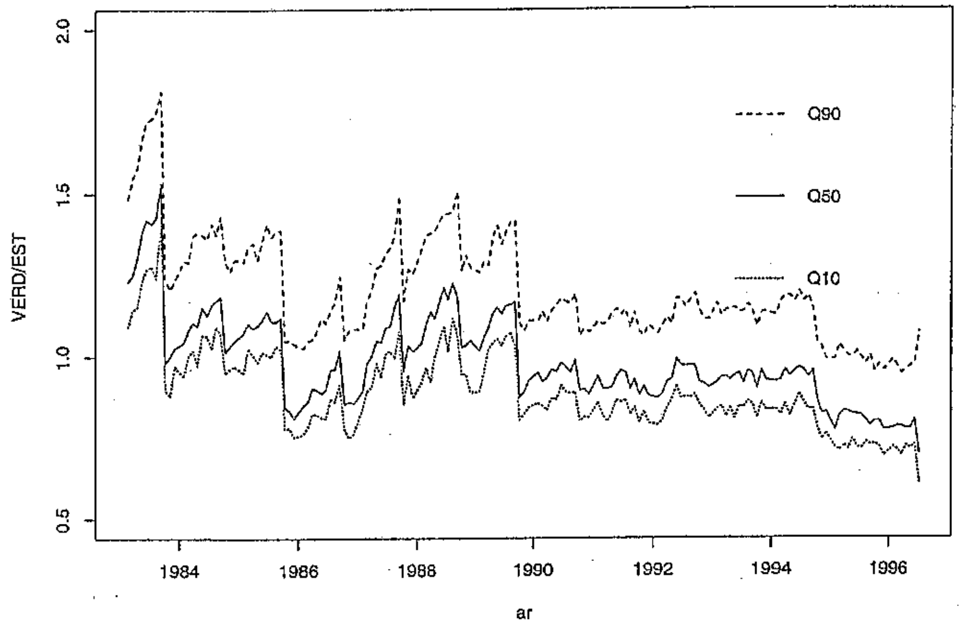
Tafla 8: Skilgreining á viðbótarbreytum í aðhvarfsgreiningu

10 hverfi, 9 0-1 breytur	
x_1 = 1 ef hverfi=12	x_2 = 1 ef hverfi=13
x_3 = 1 ef hverfi=14	x_4 = 1 ef hverfi =15 eða 16
x_5 = 1 ef hverfi= 17	x_6= 1 ef hverfi=18
x_7 = 1 ef hverfi= 22-28	x_8 = 1 ef hverfi=41,42,43 eða 47
x_9 = 1 ef hverfi= 46,49	
6 sveitarfélag, 5 0-1 breytur	
x_1 =1 ef Kópavogur	x_2=1 ef Hafnarfjörður
x_3 = 1 ef Garðabær	x_4=1 ef Mosfellsbær
x_5 =1 ef Seltjarnarnes	
Efni útveggja,	
x=1 ef ekki steypa	
Hæðarnúmer (aðeins fjölbýli) 5 0-1 breytur	
Afstaða. 2 0-1 breytur	
Fjöldi hæða, 3 0-1 breytur	
Fjöldi herbergja, 4 0-1 breytur	
Fjöldi eininga	
x=1 ef fjöldi>1 Athugasemd, 2 0-1 breytur	
x_1=1 ef athugasemd=4	x_2=1 ef athugasemd=7
Skipting eignar í bílskúr kjallara o.s.frv.	3 breytur
x_1=FINNST*íbúðarflatarmál	x_2=FINNST*kjallaraflatarmál
x_3=FINNST*bílskúrsflatarmál	

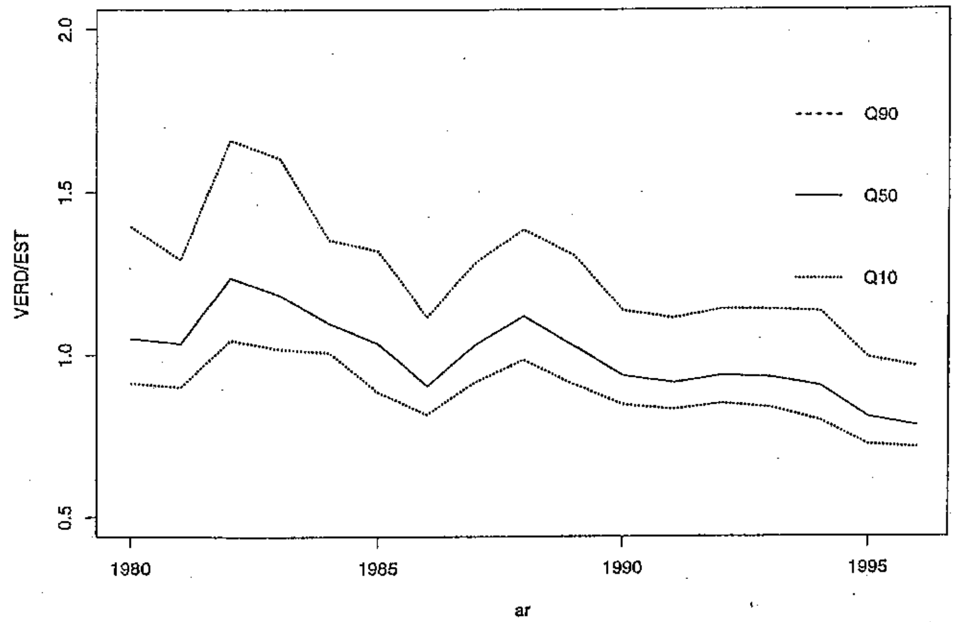
Tafla 9: Færslulýsing kaupskrár FMR

Númer	Breyta	Fjöldi dálka	Númer	Breyta	Fjöldi dálka
1	TILVIS	7	22	EINING	2
2	DAGSETNK	10	23	FINNST	1
3	FASTANR	7	24	IBUDARFLM	7
4	LANDNR	6	25	BILSKFLM	7
5	SVEITARFEL	4	26	KJALLARAFL	7
6	BYGGDNR	2	27	BRM2	7
7	LODNR	8	28	BRM3	7
8	MATHSHLNR	2	29	FJOLDIEIN	3
9	HAEDNR	2	30	ARSKODUN	2
10	EININGNR	2	31	ARMAT	2
11	BYGGAR	4	32	ENDURSTOFN	8
12	EFNIUTV	1	33	HUSAMAT	8
13	BYGGSTIG	1	34	LODARHLMAT	7
14	AFSTADA	1	35	ARKSKRABRE	4
15	FJOLDHAEDA	2	36	ATHUGASEMD	1
16	TEGMAT	1	37	KAUPVERD	7
17	FJOLDIELDH	1	38	UTBORGUN	7
18	FJOLDIHERB	2	39	NUVIRDIKAM	7
19	NYTNOTKUN	1	40	NUVIRDILAN	7
20	NOTKUN3	3	41	HEITI	20
21	FLATARMAL	7			

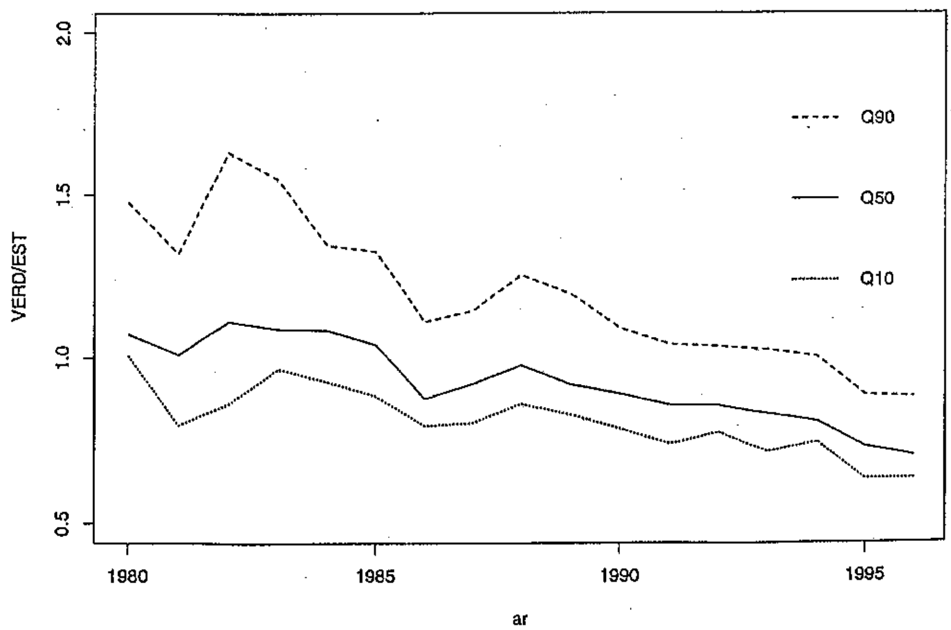
Myndir



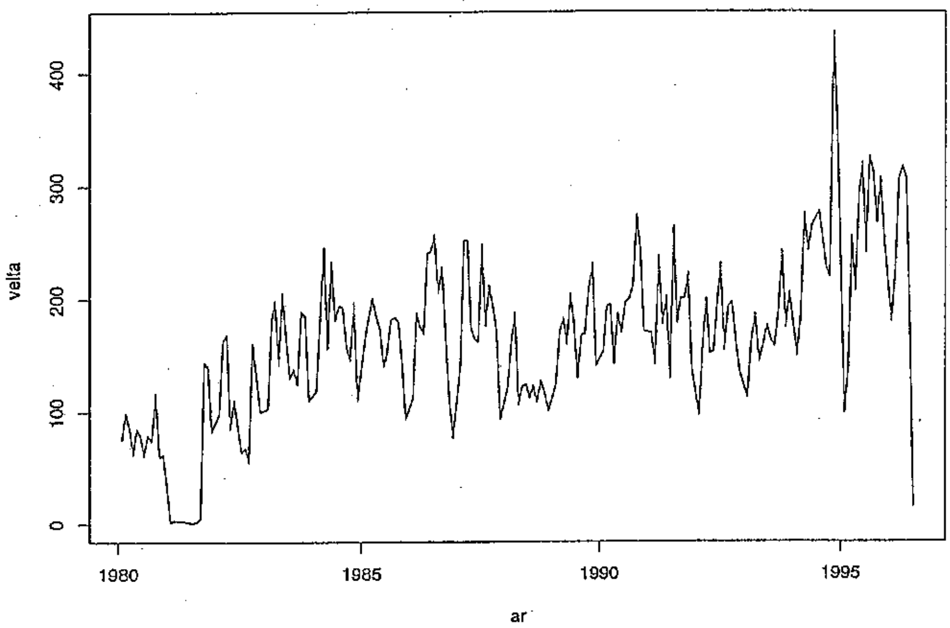
Mynd 3: Mánaðarleg dreifing verðs frá endurstofnsverði fyrir fjölbýli



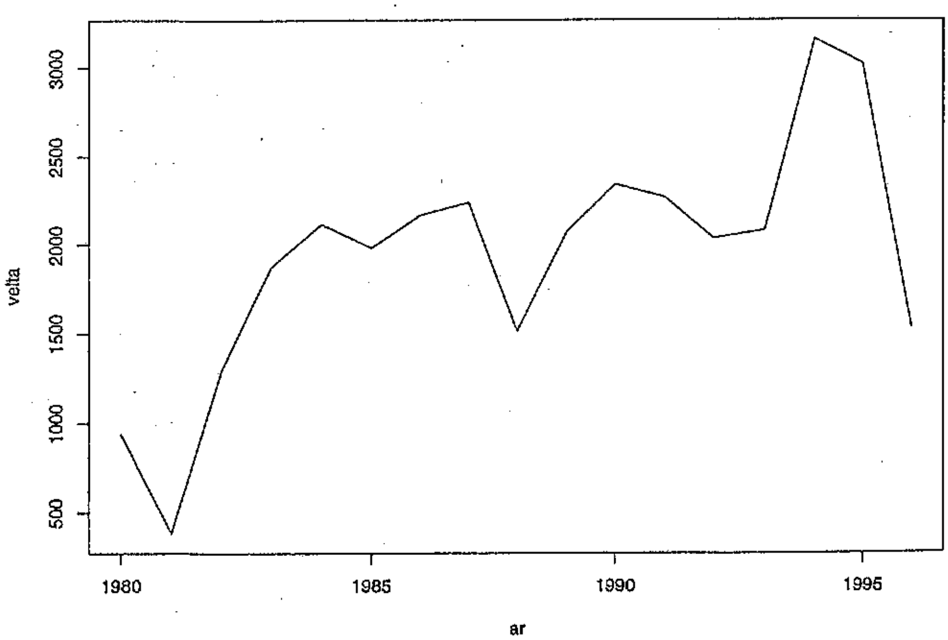
Mynd 4: Árleg dreifing verðs frá endurstofnsverði fyrir fjölbýli



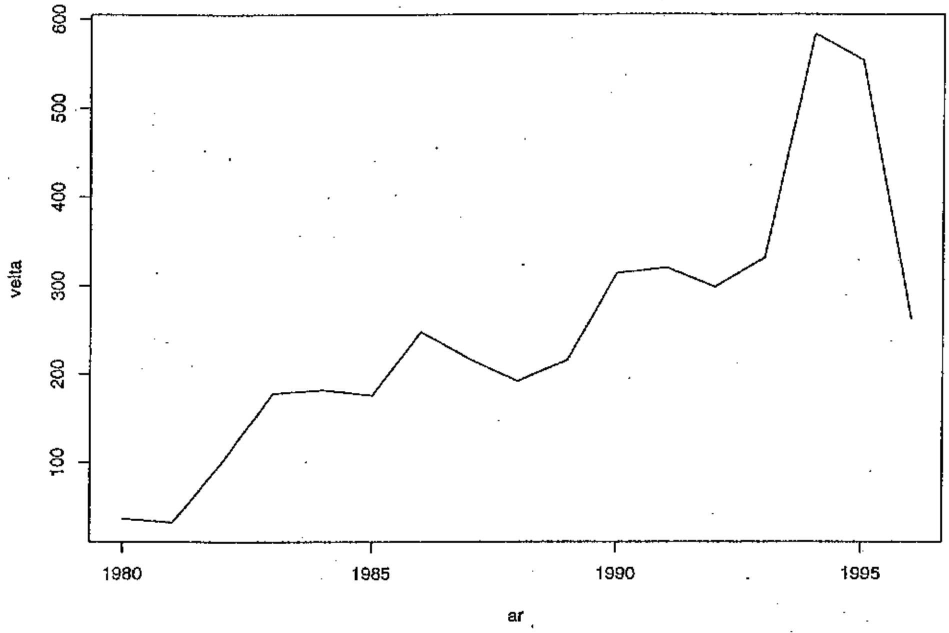
Mynd 5: Árleg dreifing verðs frá endurstofnsverði fyrir einbýli



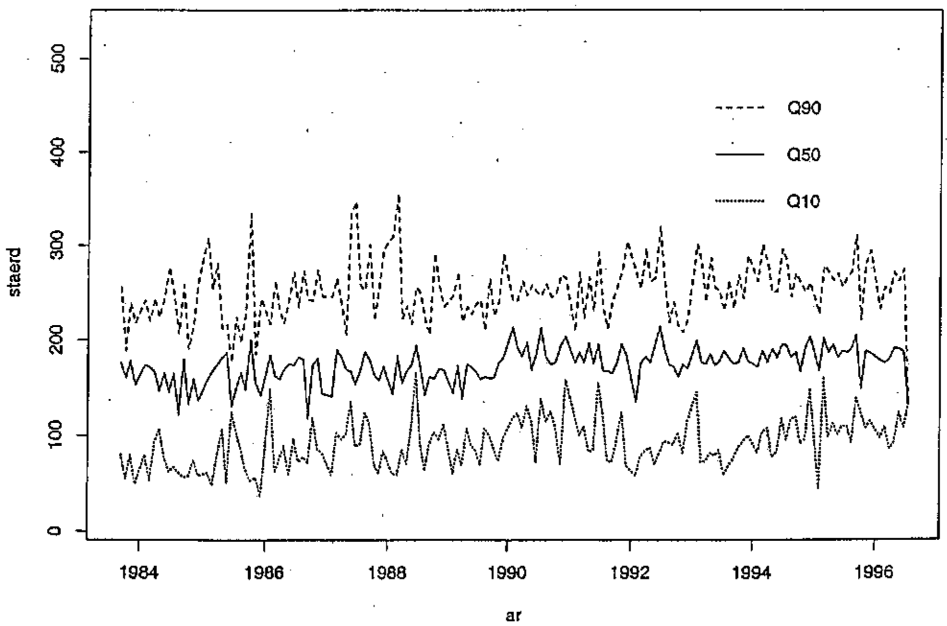
Mynd 6: Mánaðarleg velta fyrir fjölbýli



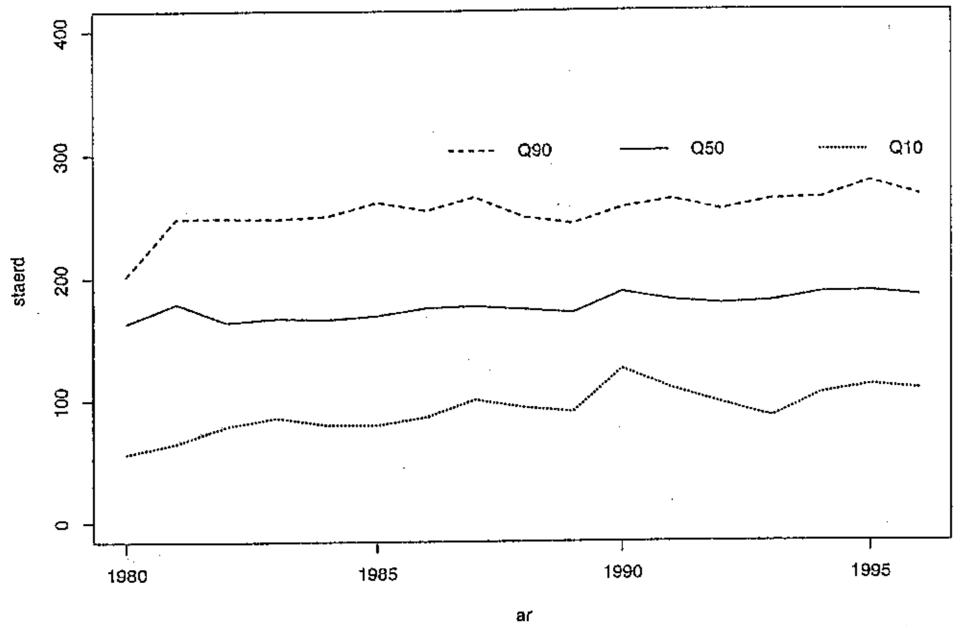
Mynd 7: Árleg velta í fjölbýli



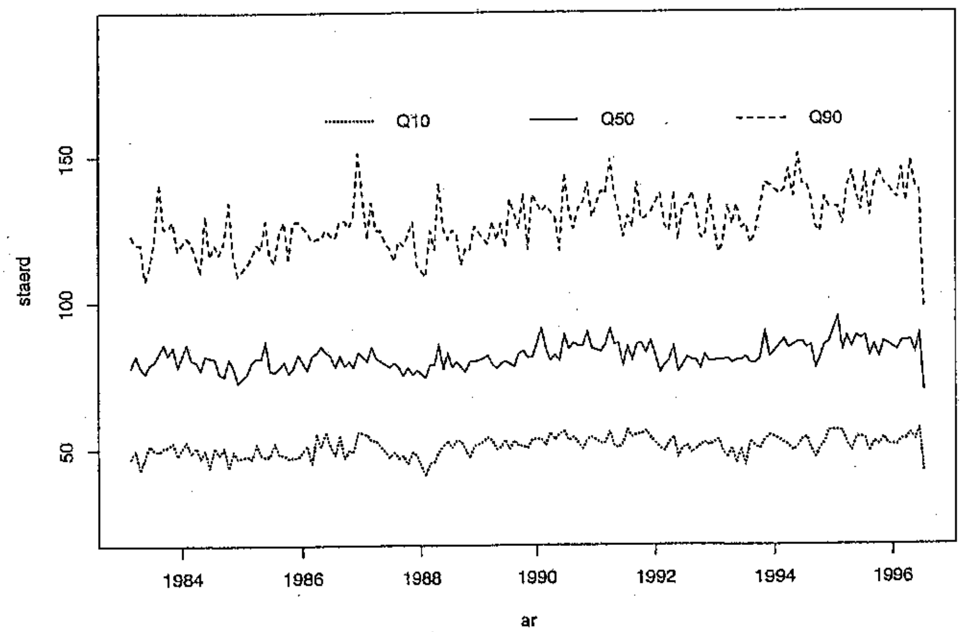
Mynd 8: Árleg velta í einbýli



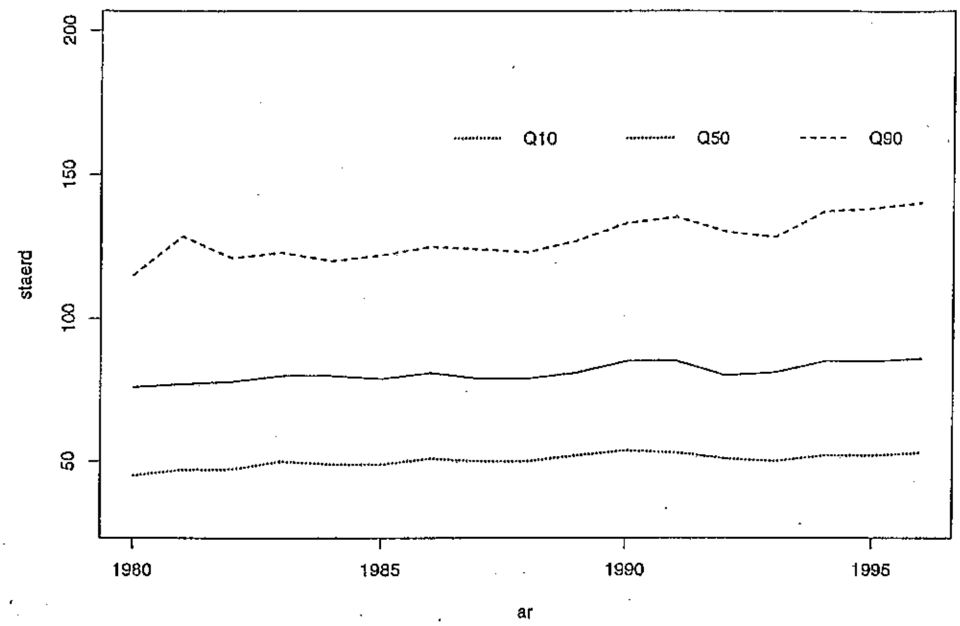
Mynd 9: Mánaðarleg stærðardreifing í einbýli



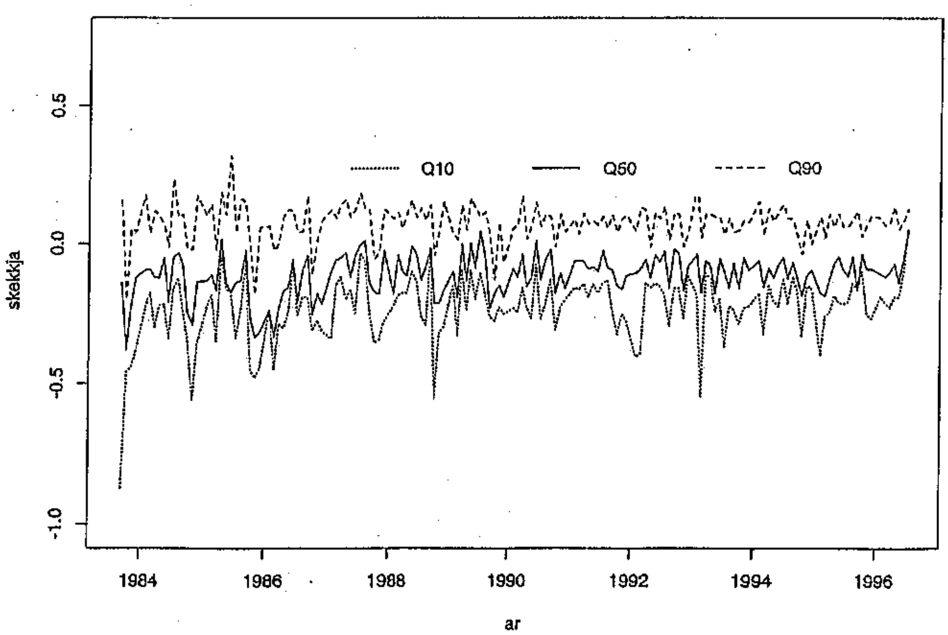
Mynd 10: Árleg stærðardreifing í einbýli



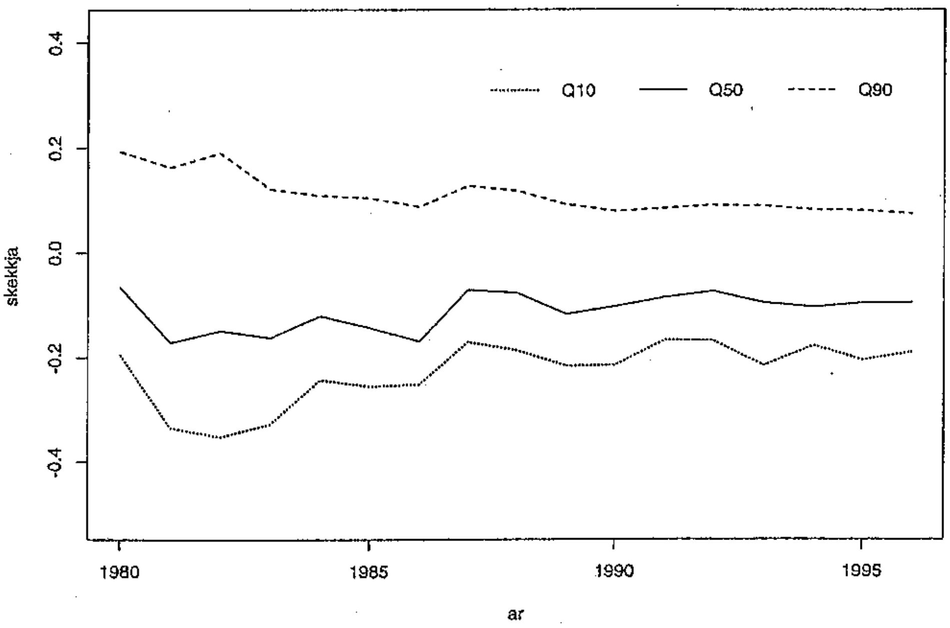
Mynd 11: Mánaðarleg stærðardreifing í fjölbýli



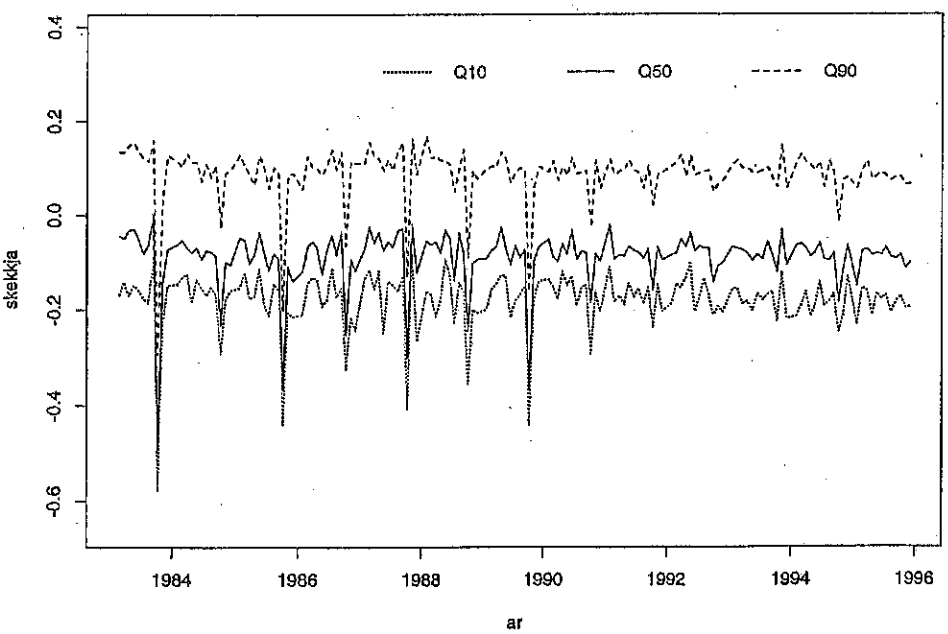
Mynd 12: Árleg stærðardreifing í fjölbýli



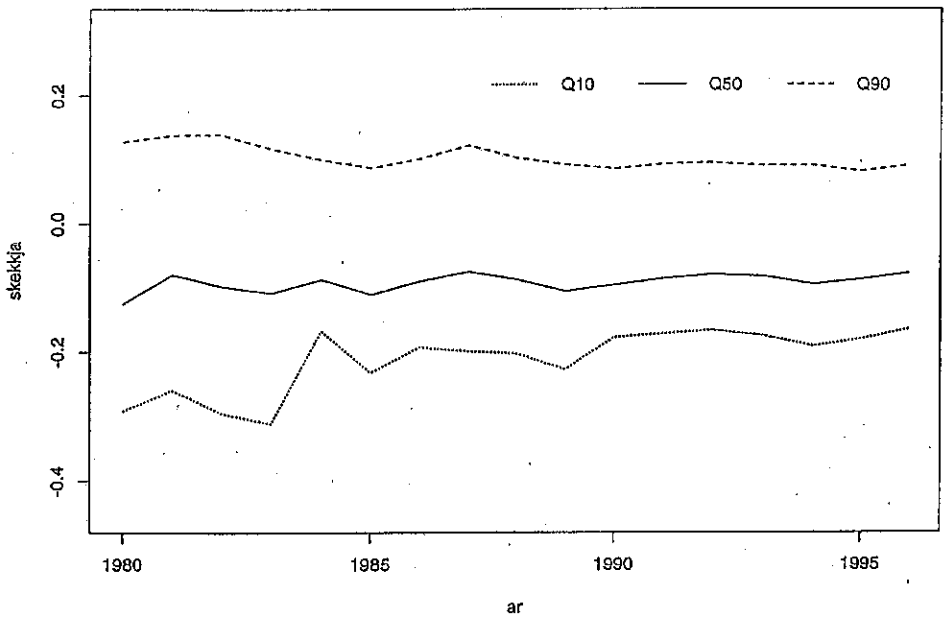
Mynd 13: Dreifing mánaðarlegrar spáskekkju fyrir einbýli



Mynd 14: Dreifing árlegrar spáskekkju fyrir einbýli



Mynd 15: Dreifing mánaðarlegar spáskekkju fyrir fjölbýli



Mynd 16: Dreifing árlegrar spáskekkju fyrir fjölbýli

Tafla 10: Hverfi vs. byggingarár (E).

	vantar	-50	51-60	61-70	71-75	76-80	81-85	86-90	91-	Alls
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
H11	0	328	3	0	0	4	1	0	0	336
H12	0	18	2	30	0	0	0	12	1	63
H13	1	59	38	42	7	9	6	2	2	166
H14	2	10	40	28	1	2	0	2	0	85
H15/16	0	36	8	22	10	5	29	8	3	121
H17	0	10	6	34	0	1	23	6	1	81
H18	28	24	225	201	59	12	11	1	0	561
H22-28	0	0	3	0	0	0	47	78	43	171
H41-3,7	2	7	1	58	4	34	36	14	2	158
H46/49	11	1	0	41	210	193	77	2	1	536
Garðabær	4	1	23	147	132	81	98	31	13	530
Hafnarfjörður	5	1	1	16	15	84	11	8	3	144
Kópavogur	5	57	118	176	80	21	29	30	15	531
Mosfellsbær	9	147	59	64	48	49	58	52	17	503
Seltjarnarnes	1	1	1	6	86	163	53	60	23	394
Alls	68	700	529	865	652	658	479	306	124	4381

Tafla 11: Hverfi vs. stærð (E).

	-70	70-110	110-150	150-210	210-270	270-370	370-	Alls
	1	0	0	0	0	0	0	1
H11	75	105	54	48	23	24	7	336
H12	1	1	3	35	17	6	0	63
H13	1	15	28	60	49	13	0	166
H14	0	1	4	50	19	11	0	85
H15/16	6	13	13	40	21	27	1	121
H17	2	0	4	30	30	13	2	81
H18	12	51	156	176	138	27	1	561
H22-28	0	6	11	112	32	10	0	171
H41-3,7	0	3	16	76	34	25	4	158
H46/49	5	5	71	227	184	41	3	536
Garðabær	4	72	50	269	92	35	8	530
Hafnarfjörður	0	0	6	71	58	8	1	144
Kópavogur	5	22	104	225	144	31	0	531
Mosfellsbær	15	29	95	254	73	37	0	503
Seltjarnarnes	36	91	52	172	31	10	2	394
Alls	163	414	667	1845	945	318	29	4381

Tafla 12: Hverfi vs. fjöldi herbergja (E).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
	0	1	0	0	0	1
H11	89	55	43	78	71	336
H12	4	1	0	35	23	63
H13	5	19	16	76	50	166
H14	0	1	14	47	23	85
H15/16	5	6	15	47	48	121
H17	2	4	2	39	34	81
H18	10	19	127	225	180	561
H22-28	1	7	24	101	38	171
H41-3,7	5	3	8	77	65	158
H46/49	8	4	14	237	273	536
Garðabær	34	51	85	239	121	530
Hafnarfjörður	0	2	13	95	34	144
Kópavogur	2	31	107	245	146	531
Mosfellsbær	16	14	70	258	145	503
Seltjarnarnes	36	65	101	139	53	394
Alls	217	283	639	1938	1304	4381

Tafla 13: Hverfi vs. aldur (E).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
	0	0	0	0	1	1
H11	0	2	1	2	331	336
H12	5	8	0	8	42	63
H13	0	2	7	30	127	166
H14	1	1	2	9	72	85
H15/16	0	7	11	36	67	121
H17	0	4	15	17	45	81
H18	0	1	14	112	434	561
H22-28	14	37	101	16	3	171
H41-3,7	1	4	38	76	39	158
H46/49	0	8	110	330	88	536
Garðabær	3	23	111	220	173	530
Hafnarfjörður	1	6	32	74	31	144
Kópavogur	5	16	48	138	324	531
Mosfellsbær	2	33	75	110	283	503
Seltjarnarnes	7	38	124	204	21	394
Alls	39	190	689	1382	2081	4381

Tafla 14: Hverfi vs. númer hæðar (E).

	1	2	3	Alls
	1	0	0	1
H11	336	0	0	336
H12	63	0	0	63
H13	166	0	0	166
H14	85	0	0	85
H15/16	121	0	0	121
H17	81	0	0	81
H18	561	0	0	561
H22-28	167	2	2	171
H41-3,7	158	0	0	158
H46/49	536	0	0	536
Garðabær	530	0	0	530
Hafnarfjörður	144	0	0	144
Kópavogur	531	0	0	531
Mosfellsbær	503	0	0	503
Seltjarnarnes	394	0	0	394
Alls	4377	2	2	4381

Tafla 15: Hverfi vs. fjöldi hæða (E).

	1	2-	Alls	
	1	0	0	1
H11	235	29	72	336
H12	38	11	14	63
H13	90	25	51	166
H14	53	12	20	85
H15/16	67	4	50	121
H17	43	4	34	81
H18	290	61	210	561
H22-28	10	101	60	171
H41-3,7	71	48	39	158
H46/49	190	100	246	536
Garðabær	76	295	159	530
Hafnarfjörður	80	30	34	144
Kópavogur	119	86	326	531
Mosfellsbær	146	143	214	503
Seltjarnarnes	82	259	53	394
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 16: Hverfi vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
	1	0	1
H11	152	184	336
H12	26	37	63
H13	84	82	166
H14	50	35	85
H15/16	68	53	121
H17	60	21	81
H18	280	281	561
H22-28	114	57	171
H41-3,7	43	115	158
H46/49	322	214	536
Garðabær	252	278	530
Hafnarfjörður	31	113	144
Kópavogur	309	222	531
Mosfellsbær	255	248	503
Seltjarnarnes	181	213	394
Alls	2228	2153	4381

Tafla 17: Hverfi vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
	0	0	1	1
H11	121	72	143	336
H12	12	21	30	63
H13	51	46	69	166
H14	23	27	35	85
H15/16	17	27	77	121
H17	14	26	41	81
H18	143	150	268	561
H22-28	0	10	161	171
H41-3,7	29	36	93	158
H46/49	103	154	279	536
Garðabær	87	174	269	530
Hafnarfjörður	14	35	95	144
Kópavogur	99	185	247	531
Mosfellsbær	46	117	340	503
Seltjarnarnes	43	113	238	394
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 18: Byggingarár vs. stærð (E).

	-70	70-110	110-150	150-210	210-270	270-370	370-	Alls
	0	0	3	40	18	7	0	68
-50	101	173	173	155	58	31	9	700
51-60	13	42	135	242	78	18	1	529
61-70	1	21	106	436	237	62	2	865
71-75	0	19	115	345	135	34	4	652
76-80	24	52	44	256	203	77	2	658
81-85	16	68	50	160	121	58	6	479
86-90	8	28	19	149	73	25	4	306
91-	0	11	22	62	22	6	1	124
Alls	163	414	667	1845	945	318	29	4381

Tafla 19: Byggingarár vs. fjöldi herbergja (E).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
	0	2	4	36	26	68
-50	112	112	112	198	166	700
51-60	10	22	119	250	128	529
61-70	2	8	110	492	253	865
71-75	3	10	97	340	202	652
76-80	35	36	53	253	281	658
81-85	35	53	55	174	162	479
86-90	15	25	41	153	72	306
91-	5	15	48	42	14	124
Alls	217	283	639	1938	1304	4381

Tafla 20: Byggingarár vs. aldur (E).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
	0	0	1	41	26	68
-50	0	0	0	0	700	700
51-60	0	0	0	0	529	529
61-70	0	0	0	226	639	865
71-75	0	0	69	399	184	652
76-80	0	18	188	449	3	658
81-85	0	24	193	262	0	479
86-90	6	66	229	5	0	306
91-	33	82	9	0	0	124
Alls	39	190	689	1382	2081	4381

Tafla 21: Byggingarár vs. númer hæðar (E).

	1	2	3	Alls
	68	0	0	68
-50	700	0	0	700
51-60	529	0	0	529
61-70	865	0	0	865
71-75	652	0	0	652
76-80	658	0	0	658
81-85	479	0	0	479
86-90	306	0	0	306
91-	120	2	2	124
Alls	4377	2	2	4381

Tafla 22: Byggingarár vs. fjöldi hæða (E).

	1	2-	Alls	
	14	17	37	68
-50	447	71	182	700
51-60	303	52	174	529
61-70	248	269	348	865
71-75	124	293	235	652
76-80	197	191	270	658
81-85	160	149	170	479
86-90	79	101	126	306
91-	19	65	40	124
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 23: Byggingarár vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
	30	38	68
-50	328	372	700
51-60	273	256	529
61-70	376	489	865
71-75	301	351	652
76-80	382	276	658
81-85	287	192	479
86-90	144	162	306
91-	107	17	124
Alls	2228	2153	4381

Tafla 24: Byggingarár vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
	18	24	26	68
-50	192	168	340	700
51-60	124	170	235	529
61-70	196	277	392	865
71-75	168	183	301	652
76-80	94	231	333	658
81-85	10	127	342	479
86-90	0	13	293	306
91-	0	0	124	124
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 25: Stærð vs. fjöldi herbergja (E).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
-70	117	28	13	3	2	163
70-110	66	171	125	45	7	414
110-150	14	58	259	294	42	667
150-210	11	16	208	1210	400	1845
210-270	8	5	29	339	564	945
270-370	1	4	5	45	263	318
370-	0	1	0	2	26	29
Alls	217	283	639	1938	1304	4381

Tafla 26: Stærð vs. aldur (E).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
-70	0	1	21	27	114	163
70-110	8	17	77	72	240	414
110-150	10	26	76	151	404	667
150-210	17	87	296	608	837	1845
210-270	3	48	152	378	364	945
270-370	1	9	62	138	108	318
370-	0	2	5	8	14	29
Alls	39	190	689	1382	2081	4381

Tafla 27: Stærð vs. númer hæðar (E).

	1	2	3	Alls
-70	163	0	0	163
70-110	410	2	2	414
110-150	667	0	0	667
150-210	1845	0	0	1845
210-270	945	0	0	945
270-370	318	0	0	318
370-	29	0	0	29
Alls	4377	2	2	4381

Tafla 28: Stærð vs. fjöldi hæða (E).

	vantar	1	2-	Alls
-70	64	80	19	163
70-110	165	147	102	414
110-150	315	174	178	667
150-210	510	694	641	1845
210-270	371	109	465	945
270-370	148	4	166	318
370-	18	0	11	29
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 29: Stærð vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
-70	120	43	163
70-110	304	110	414
110-150	445	222	667
150-210	739	1106	1845
210-270	443	502	945
270-370	167	151	318
370-	10	19	29
Alls	2228	2153	4381

Tafla 30: Stærð vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
-70	60	30	73	163
70-110	84	121	209	414
110-150	176	188	303	667
150-210	301	522	1022	1845
210-270	135	252	558	945
270-370	43	72	203	318
370-	3	8	18	29
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 31: Fjöldi herbergja vs. aldur (E).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
-2	1	9	40	45	122	217
3	12	15	55	59	142	283
4	11	53	84	137	354	639
5-6	13	73	315	625	912	1938
6-	2	40	195	516	551	1304
Alls	39	190	689	1382	2081	4381

Tafla 32: Fjöldi herb. vs. númer hæðar (E).

	1	2	3	Alls
-2	217	0	0	217
3	279	2	2	283
4	639	0	0	639
5-6	1938	0	0	1938
6-	1304	0	0	1304
Alls	4377	2	2	4381

Tafla 33: Fjöldi herbergja vs. fjöldi hæða (E).

	1	2-	Alls	
-2	74	103	40	217
3	102	114	67	283
4	260	183	196	639
5-6	582	674	682	1938
6-	573	134	597	1304
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 34: Fjöldi herb. vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
-2	131	86	217
3	186	97	283
4	406	233	639
5-6	823	1115	1938
6-	682	622	1304
Alls	2228	2153	4381

Tafla 35: Fjöldi herbergja vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
-2	57	48	112	217
3	72	70	141	283
4	119	186	334	639
5-6	371	542	1025	1938
6-	183	347	774	1304
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 36: Aldur vs. númer hæðar (E).

	1	2	3	Alls
0-1	35	2	2	39
2-5	190	0	0	190
6-10	689	0	0	689
11-20	1382	0	0	1382
21-	2081	0	0	2081
Alls	4377	2	2	4381

Tafla 37: Aldur vs. fjöldi hæða (E).

	vantar	1	2-	Alls
0-1	15	21	3	39
2-5	57	70	63	190
6-10	178	240	271	689
11-20	363	473	546	1382
21-	978	404	699	2081
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 38: Aldur vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
0-1	33	6	39
2-5	130	60	190
6-10	419	270	689
11-20	706	676	1382
21-	940	1141	2081
Alls	2228	2153	4381

Tafla 39: Aldur vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
0-1	0	2	37	39
2-5	28	25	137	190
6-10	146	225	318	689
11-20	262	406	714	1382
21-	366	535	1180	2081
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 40: Númer hæðar vs. fjöldi hæða (E).

	vantar	1	2-	Alls
1	1587	1208	1582	4377
2	2	0	0	2
3	2	0	0	2
Alls	1591	1208	1582	4381

Tafla 41: Númer hæðar vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
1	2224	2153	4377
2	2	0	2
3	2	0	2
Alls	2228	2153	4381

Tafla 42: Númer hæðar vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
1	802	1193	2382	4377
2	0	0	2	2
3	0	0	2	2
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 43: Fjöldi hæða vs. fjöldi eininga (E).

	1	2-	Alls
	798	793	1591
1	510	698	1208
2-	920	662	1582
Alls	2228	2153	4381

Tafla 44: Fjöldi hæða vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
	377	437	777	1591
1	190	346	672	1208
2-	235	410	937	1582
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 45: Fjöldi eininga vs. ár sölu (E).

	80-85	86-90	91-	Alls
1	481	646	1101	2228
2-	321	547	1285	2153
Alls	802	1193	2386	4381

Tafla 46: Hverfi vs. byggingarár (F).

	vantar	-50	51-60	61-70	71-75	76-80	81-85	86-90	91-	Alls
H11	2	3653	270	70	58	54	65	78	35	4285
H12	0	1314	340	1342	3	2	7	98	9	3115
H13	11	901	928	496	11	40	17	16	11	2431
H14	0	344	1034	443	2	7	0	3	0	1833
H15/16	20	924	864	497	28	450	356	122	6	3267
H17	0	825	408	162	1	14	196	16	15	1637
H18	50	32	420	735	402	52	61	0	6	1758
H22-28	0	0	1	0	0	0	31	281	239	552
H41-3,7	0	0	2	1335	60	37	338	121	2	1895
H46/49	419	0	0	959	2421	1873	69	2	39	5782
Garðabær	0	13	11	4	7	143	125	51	24	378
Hafnarfjörður	24	20	73	63	51	77	134	23	23	488
Kópavogur	184	48	381	882	773	1163	232	110	96	3869
Mosfellsbær	229	490	492	1069	309	202	73	110	117	3091
Seltjarnarnes	0	6	5	5	18	31	47	6	23	141
Alls	939	8570	5229	8062	4144	4145	1751	1037	645	34522

Tafla 47: Hverfi vs. stærð (F).

	-70	70-110	110-150	150-210	210-270	270-370	370-	Alls
H11	2245	1520	322	143	25	16	14	4285
H12	1189	1236	516	151	18	1	4	3115
H13	886	1059	340	129	12	5	0	2431
H14	529	909	263	124	8	0	0	1833
H15/16	1208	1413	466	138	27	8	7	3267
H17	356	780	355	121	23	2	0	1637
H18	634	785	262	58	16	2	1	1758
H22-28	82	275	142	46	6	0	1	552
H41-3,7	754	974	144	21	2	0	0	1895
H46/49	1828	3083	794	61	8	4	4	5782
Garðabær	56	206	88	23	3	1	1	378
Hafnarfjörður	110	217	119	38	3	1	0	488
Kópavogur	995	2209	474	174	16	1	0	3869
Mosfellsbær	850	1310	736	173	16	1	5	3091
Seltjarnarnes	14	89	17	17	1	2	1	141
Alls	11736	16065	5038	1417	184	44	38	34522

Tafla 48: Hverfi vs. fjöldi herbergja (F).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
H11	1444	1484	810	382	165	4285
H12	819	1029	596	607	64	3115
H13	683	793	549	352	54	2431
H14	426	547	572	254	34	1833
H15/16	963	1143	643	439	79	3267
H17	293	531	490	268	55	1637
H18	475	426	544	270	43	1758
H22-28	119	191	146	87	9	552
H41-3,7	717	511	402	255	10	1895
H46/49	1789	1528	1592	829	44	5782
Garðabær	108	146	77	28	19	378
Hafnarfjörður	142	127	131	85	3	488
Kópavogur	857	1556	959	465	32	3869
Mosfellsbær	752	1008	784	493	54	3091
Seltjarnarnes	24	64	28	21	4	141
Alls	9611	11084	8323	4835	669	34522

Tafla 49: Hverfi vs. aldur (F).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
H11	24	41	111	119	3990	4285
H12	17	33	61	234	2770	3115
H13	8	16	35	156	2216	2431
H14	0	0	4	57	1772	1833
H15/16	3	140	414	520	2190	3267
H17	4	28	119	107	1379	1637
H18	0	17	120	560	1061	1758
H22-28	159	123	252	17	1	552
H41-3,7	1	45	291	810	748	1895
H46/49	31	152	1193	3457	949	5782
Garðabær	12	42	127	167	30	378
Hafnarfjörður	9	37	113	145	184	488
Kópavogur	85	119	785	1643	1237	3869
Mosfellsbær	30	120	247	913	1781	3091
Seltjarnarnes	16	13	37	56	19	141
Alls	399	926	3909	8961	20327	34522

Tafla 50: Hverfi vs. númer hæðar (F).

	vantar	1	2	3	4	5-	Alls
H11	746	1219	1242	780	249	49	4285
H12	797	750	721	466	340	41	3115
H13	719	598	547	318	110	139	2431
H14	552	387	336	185	142	231	1833
H15/16	637	785	764	630	356	95	3267
H17	431	373	384	316	116	17	1637
H18	220	663	541	236	70	28	1758
H22-28	12	238	172	97	18	15	552
H41-3,7	96	535	592	577	75	20	1895
H46/49	204	1261	1453	1478	581	805	5782
Garðabær	14	122	129	79	20	14	378
Hafnarfjörður	14	127	126	93	56	72	488
Kópavogur	395	1180	1097	482	269	446	3869
Mosfellsbær	204	1093	949	551	209	85	3091
Seltjarnarnes	22	59	50	8	2	0	141
Alls	5063	9390	9103	6296	2613	2057	34522

Tafla 51: Hverfi vs. fjöldi hæða (F).

	vantar	1	2-	Alls
H11	4149	4	132	4285
H12	3063	0	52	3115
H13	2334	0	97	2431
H14	1729	1	103	1833
H15/16	3169	1	97	3267
H17	1636	0	1	1637
H18	1621	0	137	1758
H22-28	416	20	116	552
H41-3,7	1849	1	45	1895
H46/49	5720	0	62	5782
Garðabær	313	3	62	378
Hafnarfjörður	445	0	43	488
Kópavogur	3306	4	559	3869
Mosfellsbær	2801	0	290	3091
Seltjarnarnes	58	0	83	141
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 52: Hverfi vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
H11	2918	1367	4285
H12	2598	517	3115
H13	2046	385	2431
H14	1550	283	1833
H15/16	2651	616	3267
H17	1255	382	1637
H18	1511	247	1758
H22-28	412	140	552
H41-3,7	1844	51	1895
H46/49	4920	862	5782
Garðabær	235	143	378
Hafnarfjörður	270	218	488
Kópavogur	3277	592	3869
Mosfellsbær	2555	536	3091
Seltjarnarnes	98	43	141
Alls	28140	6382	34522

Tafla 53: Hverfi vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
H11	1375	1136	1774	4285
H12	940	928	1247	3115
H13	737	796	898	2431
H14	577	575	681	1833
H15/16	842	988	1437	3267
H17	418	501	718	1637
H18	572	487	699	1758
H22-28	0	16	536	552
H41-3,7	517	545	833	1895
H46/49	2078	1858	1846	5782
Garðabær	17	87	274	378
Hafnarfjörður	44	130	314	488
Kópavogur	1066	1314	1489	3869
Mosfellsbær	808	942	1341	3091
Seltjarnarnes	14	34	93	141
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 54: Byggingarár vs. stærð (F).

	-70	70-110	110-150	150-210	210-270	270-370	370-	Alls
	337	502	81	17	1	1	0	939
-50	4273	2953	874	359	72	21	18	8570
51-60	1332	2650	919	287	34	7	0	5229
61-70	2246	4106	1304	385	19	2	0	8062
71-75	1394	2165	491	72	15	1	6	4144
76-80	1239	2066	714	100	17	8	1	4145
81-85	525	802	312	92	11	4	5	1751
86-90	306	446	204	65	13	0	3	1037
91-	84	375	139	40	2	0	5	645
Alls	11736	16065	5038	1417	184	44	38	34522

Tafla 55: Byggingarár vs. fjöldi herbergja (F).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
	315	196	213	211	4	939
-50	2686	3071	1581	882	350	8570
51-60	982	1746	1439	947	115	5229
61-70	1895	2376	2317	1406	68	8062
71-75	1252	1141	1171	537	43	4144
76-80	1241	1509	868	484	43	4145
81-85	694	506	330	204	17	1751
86-90	412	294	191	123	17	1037
91-	134	245	213	41	12	645
Alls	9611	11084	8323	4835	669	34522

Tafla 56: Byggingarár vs. aldur (F).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
	0	0	34	584	321	939
-50	0	0	0	0	8570	8570
51-60	0	0	0	0	5229	5229
61-70	0	0	0	2646	5416	8062
71-75	0	0	747	2631	766	4144
76-80	1	254	1485	2380	25	4145
81-85	2	177	878	694	0	1751
86-90	35	230	746	26	0	1037
91-	361	265	19	0	0	645
Alls	399	926	3909	8961	20327	34522

Tafla 57: Byggingarár vs. númer hæðar (F).

	vantar	1	2	3	4	5-	Alls
	26	235	242	216	48	172	939
-50	2395	2517	2312	1062	263	21	8570
51-60	1233	1432	1318	757	335	154	5229
61-70	915	2312	2125	1764	679	267	8062
71-75	116	918	1069	840	553	648	4144
76-80	269	971	1022	952	410	521	4145
81-85	73	445	484	397	219	133	1751
86-90	23	342	316	202	76	78	1037
91-	13	218	215	106	30	63	645
Alls	5063	9390	9103	6296	2613	2057	34522

Tafla 58: Byggingarár vs. fjöldi hæða (F).

	vantar	1	2-	Alls
	913	0	26	939
-50	8088	4	478	8570
51-60	4853	6	370	5229
61-70	7674	2	386	8062
71-75	4036	0	108	4144
76-80	3941	2	202	4145
81-85	1655	0	96	1751
86-90	887	19	131	1037
91-	562	1	82	645
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 59: Byggingarár vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
	857	82	939
-50	6453	2117	8570
51-60	4224	1005	5229
61-70	6979	1083	8062
71-75	3653	491	4144
76-80	3317	828	4145
81-85	1307	444	1751
86-90	812	225	1037
91-	538	107	645
Alls	28140	6382	34522

Tafla 60: Byggingarár vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
	321	297	321	939
-50	2707	2485	3378	8570
51-60	1470	1647	2112	5229
61-70	2717	2487	2858	8062
71-75	1554	1315	1275	4144
76-80	1165	1492	1488	4145
81-85	71	528	1152	1751
86-90	0	86	951	1037
91-	0	0	645	645
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 61: Stærð vs. fjöldi herbergja (F).

	-2	3	4	5-6	6-	Alls
-70	8376	2987	332	23	18	11736
70-110	1169	7537	5814	1527	18	16065
110-150	51	536	1963	2363	125	5038
150-210	12	19	204	880	302	1417
210-270	0	1	5	38	140	184
270-370	1	0	0	1	42	44
370-	2	4	5	3	24	38
Alls	9611	11084	8323	4835	669	34522

Tafla 62: Stærð vs. aldur (F).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
-70	44	300	1253	2690	7449	11736
70-110	278	418	1924	4705	8740	16065
110-150	59	153	592	1281	2953	5038
150-210	16	45	114	246	996	1417
210-270	0	5	20	22	137	184
270-370	0	0	2	11	31	44
370-	2	5	4	6	21	38
Alls	399	926	3909	8961	20327	34522

Tafla 63: Stærð vs. númer hæðar (F).

	vantar	1	2	3	4	5-	Alls
-70	2812	2864	2441	1910	828	881	11736
70-110	1869	4183	4327	3343	1380	963	16065
110-150	178	1682	1697	936	369	176	5038
150-210	113	568	569	100	36	31	1417
210-270	61	66	53	2	0	2	184
270-370	25	14	5	0	0	0	44
370-	5	13	11	5	0	4	38
Alls	5063	9390	9103	6296	2613	2057	34522

Tafla 64: Stærð vs. fjöldi hæða (F).

	vantar	1	2-	Alls
-70	11230	6	500	11736
70-110	15284	13	768	16065
110-150	4689	11	338	5038
150-210	1191	2	224	1417
210-270	141	1	42	184
270-370	38	0	6	44
370-	36	1	1	38
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 65: Stærð vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
-70	11040	696	11736
70-110	14394	1671	16065
110-150	2379	2659	5038
150-210	290	1127	1417
210-270	33	151	184
270-370	3	41	44
370-	1	37	38
Alls	28140	6382	34522

Tafla 66: Stærð vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
-70	3772	3467	4497	11736
70-110	4715	4954	6396	16065
110-150	1181	1483	2374	5038
150-210	285	387	745	1417
210-270	39	35	110	184
270-370	7	8	29	44
370-	6	3	29	38
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 67: Fjöldi herbergja vs. aldur (F).

	0-1	2-5	6-10	11-20	21-	Alls
-2	95	331	1343	2596	5246	9611
3	151	300	1237	2704	6692	11084
4	127	191	854	2355	4796	8323
5-6	19	93	444	1230	3049	4835
6-	7	11	31	76	544	669
Alls	399	926	3909	8961	20327	34522

Tafla 68: Fjöldi herbergja vs. númer hæðar (F).

	vantar	1	2	3	4	5-	Alls
-2	2417	2291	1790	1546	737	830	9611
3	1814	2927	2777	2027	905	634	11084
4	470	2376	2636	1813	660	368	8323
5-6	181	1566	1695	885	297	211	4835
6-	181	230	205	25	14	14	669
Alls	5063	9390	9103	6296	2613	2057	34522

Tafla 69: Fjöldi herb vs. fjöldi hæða (F).

	1	2-	Alls	
-2	9191	10	410	9611
3	10377	8	699	11084
4	7959	6	358	8323
5-6	4506	8	321	4835
6-	576	2	91	669
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 70: Fjöldi herb. vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
-2	8819	792	9611
3	9570	1514	11084
4	6556	1767	8323
5-6	2996	1839	4835
6-	199	470	669
Alls	28140	6382	34522

Tafla 71: Fjöldi herbergja vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
-2	2917	2816	3878	9611
3	3164	3330	4590	11084
4	2473	2549	3301	8323
5-6	1290	1470	2075	4835
6-	161	172	336	669
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 72: Aldur vs. númer hæðar (F).

	vantar	1	2	3	4	5-	Alls
0-1	3	131	136	65	22	42	399
2-5	35	254	265	187	86	99	926
6-10	150	965	1010	887	417	480	3909
11-20	518	2308	2394	2013	841	887	8961
21-	4357	5732	5298	3144	1247	549	20327
Alls	5063	9390	9103	6296	2613	2057	34522

Tafla 73: Aldur vs. fjöldi hæða (F).

	1	2-	Alls	
0-1	342	1	56	399
2-5	856	1	69	926
6-10	3688	19	202	3909
11-20	8609	2	350	8961
21-	19114	11	1202	20327
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 74: Aldur vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
0-1	334	65	399
2-5	815	111	926
6-10	3315	594	3909
11-20	7609	1352	8961
21-	16067	4260	20327
Alls	28140	6382	34522

Tafla 75: Aldur vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
0-1	3	16	380	399
2-5	323	178	425	926
6-10	1691	995	1223	3909
11-20	3193	3076	2692	8961
21-	4795	6072	9460	20327
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 76: Númer hæðar vs. fjöldi hæða (F).

	vantar	1	2-	Alls
	4650	0	413	5063
1	8436	34	920	9390
2	8557	0	546	9103
3	6296	0	0	6296
4	2613	0	0	2613
5-	2057	0	0	2057
Alls	32609	34	1879	34522

Tafla 77: Númer hæðar vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
	4494	569	5063
1	7133	2257	9390
2	7045	2058	9103
3	5406	890	6296
4	2190	423	2613
5-	1872	185	2057
Alls	28140	6382	34522

Tafla 78: Númer hæðar vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
	1573	1540	1950	5063
1	2594	2737	4059	9390
2	2566	2642	3895	9103
3	1888	1923	2485	6296
4	736	854	1023	2613
5-	648	641	768	2057
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 79: Fjöldi hæða vs. fjöldi eininga (F).

	1	2-	Alls
	26829	5780	32609
1	26	8	34
2-	1285	594	1879
Alls	28140	6382	34522

Tafla 80: Fjöldi hæða vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
	9672	9819	13118	32609
1	5	7	22	34
2-	328	511	1040	1879
Alls	10005	10337	14180	34522

Tafla 81: Fjöldi eininga vs. ár sölu (F).

	80-85	86-90	91-	Alls
1	8948	8702	10490	28140
2-	1057	1635	3690	6382
Alls	10005	10337	14180	34522

Þjónustuskýrslur Hagfræðistofnunar Háskóla Íslands

C90:01 Orkuverð á Íslandi
C91:01 Gengisstefna í opnu smáríki
C91:02 Efnahagssamvinna Evrópuþjóða og hagstjórn á Íslandi
C91:03 Kostnaður og tekjur þjóðfélagsins vegna áfengisneyslu árin 1985-1989
C91:04 Fjármagnsmarkaður og hagstjórn
C91:05 Þjóðhagsleg hagkvæmni eflingar leikskóla og lengri skóladags í grunnskóla
C91:06 Ákvæðisvinna og hlutaskipti í opinberum rekstri
C91:07 Verðmyndun og þróun matvöruverðs á Íslandi
C92:01 Áætlun um sparnað á árinu 1992
C92:02 Framkvæmdir og verktakar
C92:03 Starfsmenntun og atvinnulífið
C92:04 Samanburður á heilbrigðisútgjöldum: Fyrri hluti
C92:05 Neytendur, GATT og verðlag landbúnaðarafurða
C92:06 Hagkvæmni sameiningar stofnana og fyrirtækja sveitarfélaga á höfuðborgarsvæðinu
C92:07 Fiskveiðar: Verðmæti og afkoma
C92:08 Þjóðhagsleg arðsemi menntunar
C92:09 Þjóðhagslegur ávinningur Hvalfjarðarganga
C92:10 Mat á þjóðhagslegum ábata almenningsvagna, framhaldskönnun
C92:11 Tekju- og gjaldaskipting í skráningum og skoðunum ökutækja
C92:12 Tjónabifreiðar
C93:01 Rekstur innlánsstofnana á Íslandi
C93:02 Tannlæknadeild og arðsemi tannlæknamenntunar
C93:03 Stuðningur íslenskra stjórnvalda við landbúnað
C93:04 Bókaútgáfa á Íslandi árin 1987-1992
C93:05 Tekju- og gjaldaskipting í skráningum og skoðunum ökutækja (II)
C93:06 Fiskvinnsla: Vinnslustöðvar, framleiðsla og útflutningur
C93:07 Er hagkvæmt að taka upp þríprófs fyrir þungaðar konur?
C93:08 Útgjöld íslenskra ferðamanna erlendis: Tímabilið október til desember árið 1992
C93:09 Spálíkan fyrir nokkrar mikilvægar þjóðhagsstærðir, til skamms tíma
C93:10 Verðnæmi eftirspurnar í innanlandsflugi: kostnaður, verðlagning og afkoma
C94:01 Staða bílgreinarinnar í íslensku efnahagslífi
C94:02 Sameining orkufyrirtækja í Borgarfirði
C94:03 Keflavíkurflugvöllur: Tekjuöflunarleiðir og markaðssetning
C94:04 Ísland og Evrópusambandið
C95:01 Kostnaður vegna umferðarslysa 1993
C95:02 Bókaútgáfa á Íslandi árið 1993
C95:03 Investment Opportunities in the Baltic States
C95:04 Sex matarkörfur
C95:05 Forathugun vegna könnunar á flutningum eftir vegkerfinu
C95:06 Kostnaður við Lánasjóð íslenskra námsmanna og eiginfjárstaða sjóðsins um áramót 1994-1995
C95:07 Samanburður á niðurstöðum OECD skýrslu og skýrslu Hagfræðistofnunar H.Í.
C95:08 Bókaútgáfa á Íslandi árið 1994
C95:09 Framreikningur heilbrigðisútgjalda
C96:01 Könnun á flutningum eftir vegakerfinu: Áfangaskýrsla nr. 1
C96:02 Greining arðsemi vetrarþjónustu Vegagerðarinnar
C96:03 Kostnaður vegna umferðarslysa á Íslandi
C96:04 Nýjar aðferðir við áhættustjórnun í bankakerfinu: Tillögur um undirbúning og framkvæmd
C97:01 Staðsetning Reykjavíkurflugvallar
C97:02 Menntun, mannauður og framleiðni
C97:03 Forathugun á skipulagi samgöngumála
C97:04 Könnun á flutningum eftir vegakerfinu: Áfangaskýrsla nr. 2
C97:05 Bókaútgáfa á Íslandi árið 1995
C97:06 Veiðigjald og skattbyrði byggðarlaga
C97:07 Kynslóðareikningar fyrir Ísland
C97:08 Hlutdeild kvenna í heildartekjum íþróttahreyfingarinnar
C97:09 Framleiðni innan atvinnugreina á Íslandi 1973-1994: Samanburður við Danmörku og Bandaríkin

C98:01 Könnun á flutningum eftir vegakerfinu: Áfangaskýrsla nr. 3
C98:02 Atvinnuáhrif vegna Reykjavíkurflugvallar
C98:03 Eftirspurn eftir innanlandsflugi
C98:04 Tölfræðilegar aðferðir við fasteignamat

Rannsóknarskýrslur Hagfræðistofnunar Háskóla Íslands

R93:01 Utvärdering av Vestnordefonden
R93:02 Framleiðni fyrirtækja
R94:01 Small National Markets in Transition: The Case of Iceland
R94:02 The Icelandic and the Faroese Economies: A Comparison of the Fishing Sectors
R94:03 Energy Demand in Iceland
R94:04 Input-Output Model for the Electricity Supply Industry in Iceland
R95:01 Trade Between Iceland and the Soviet Union 1953-1996: Rise and Fall of Barter Exchange
R96:01 Savings, Risk Diversification, and Economic Growth in Iceland
R97:01 Infrequent Trading and the Stock Index: A Kalman Filter Approach to Estimation
R98:01 Vinnumarkaðurinn og EMU
R98:02 Um ávöxtun og núvirðingu
R98:03 Þjóðhagslíkan Hagfræðistofnunar: Áfangaskýrsla nr. 1

Bækur

B92:01 Peningar og gengi: Greinasafn um hagstjórn og peningamál á Íslandi, Guðmundur Magnússon
B95:01 Ísland og Evrópusambandið: Skýrslur fjögurra stofnana Háskóla Íslands
B97:01 Frjálsræði í efnahagsmálum: Ársskýrsla 1997